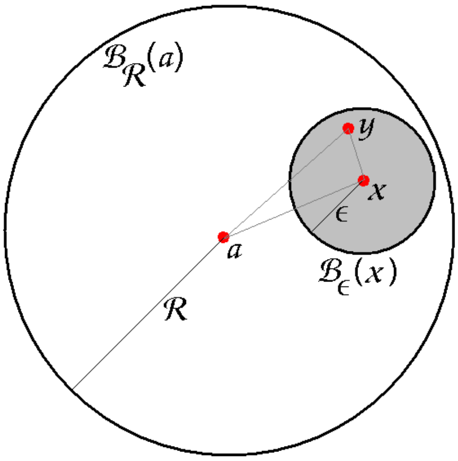
Christoph Niehoff

Aufgabe 1.



Sei $x \in B_R(a)$. Wähle nun ein beliebiges $y \in B_\epsilon(x)$ mit $\epsilon = R - d(x,a)$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} d(a,y) &\leq d(a,x) + \underbrace{d(x,y)}_{<\epsilon} \\ &< d(a,x) + \epsilon \\ &= d(a,x) + R - d(x,a) \\ &= R, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung wegen der Symmetrie von Metriken gilt.
Insgesamt haben wir also $d(a,y) < R$, also $y \in B_R(a)$. Da aber y ein beliebiges Element aus $B_\epsilon(x)$ war, haben wir $B_\epsilon(x) \subset B_R(a)$. Darum ist $B_R(a)$ offen.

Aufgabe 2.

Zuerst parametrisieren wir die Spirale als Kurve im $\mathbb{R}^2$:

$$\gamma(t) = (r(t)\cos(t), r(t)\sin(t))^{\mathrm{T}}.$$

Bei einer Spirale wird der Radius linear größer, also $r(t) = \alpha t = \frac{d}{2\pi}t$, wobei wir den Rillenabstand d eingeführt haben.
Jetzt berechnen wir den Tangentialvektor $\dot\gamma(t) = \left(\dot r^2\cos(t) - r\sin(t), \dot r^2\sin(t) + r\cos(t)\right)^{\mathrm{T}}$ und dessen Länge $\|\dot\gamma(t)\|_2 = \sqrt{\dot r^2 + r^2} = \alpha\sqrt{1+t^2}$. Jetzt kann die Spirallänge berechnet werden:

$$\begin{aligned} L(\gamma) &= \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\ \|\dot\gamma(t)\|_2 \\ &= \alpha \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t\ \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

Durch die Substitution $t = \sinh(\theta)$ erhält man $\int \mathrm{d}t\sqrt{1+t^2} = \int \mathrm{d}\theta \cosh^2(\theta)$. Durch Ausschreiben des cosh in exp-Funktionen erhält man $\int \mathrm{d}\theta\cosh^2(\theta) = \frac{1}{2}\mathrm{arsinh}(2\theta) + \frac{1}{2}\theta$. Insgesamt ergibt sich damit für die Spirallänge

$$L(\gamma) = \frac{1}{4}\alpha\left(\sinh\left(2\,\mathrm{arsinh}(t_1)\right) - \sinh\left(2\,\mathrm{arsinh}(t_0)\right)\right) + \frac{1}{2}\alpha\left(\mathrm{arsinh}(t_1) - \mathrm{arsinh}(t_0)\right).$$

Einsetzen der Zahlenwerte $t_0 = \frac{7.5\,\mathrm{mm}}{d}2\pi$, $t_1 = \frac{60\,\mathrm{mm}}{d}2\pi$, $\alpha = \frac{d}{2\pi}$ und $d = 1,6\,\mu\mathrm{m}$ liefert $L(\gamma) = 6,96\,\mathrm{km}$.

Aufgabe 3.

Der Radius einer solche Kugel entspricht der inversen Krümmung $R = \frac{1}{\kappa(t=0)}$ der Parabel am Ursprung. Zuerst parametrisieren wir die Parabellinie

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))^{\mathrm{T}} = \left(t, t^2\right)^{\mathrm{T}}.$$

Damit berechnet sich jetzt leicht die Krümmung:

$$\kappa(t) = \left(\frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}\right)(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Damit erhalten wir einen Radius $R = \frac{1}{\kappa(t=0)} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 4.

a) Zuerst berechnen wir den Tangentialvektor zur Kurve

$$\dot{\gamma}_\alpha(t) = \left(\alpha t^{\alpha-1}, 1\right).$$

Dann haben wir

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\alpha} \langle F(s), \mathrm{d}s\rangle &= \int_0^1 \langle F\left(\gamma_\alpha(t)\right), \dot{\gamma}_\alpha(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left\langle \left(t^3, t^{3\alpha}\right), \left(\alpha t^{\alpha-1}, 1\right)\right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\alpha t^{\alpha+2} + t^{3\alpha}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\alpha}{\alpha+3} t^{\alpha+3} + \frac{1}{3\alpha+1} t^{3\alpha+1}\right]_0^1 \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+3} + \frac{1}{3\alpha+1} = \frac{3\alpha^2+2\alpha+3}{3\alpha^2+10\alpha+3}
\end{aligned}$$

b) Hier liegt ein Wegintegral über eine skalare Funktion vor. Wir berechnen zuerst das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
h(x,y) = \langle F(s), G_\alpha(s)\rangle &= 2\alpha^2 \left\langle \left(y^3, x^3\right), \left(\alpha x^{2-\frac{6}{\alpha}}, -y^{-\alpha-3}\right)\right\rangle \\
&= 2\alpha^3 x^{2-\frac{6}{\alpha}} y^3 - 2\alpha^2 x^3 y^{-\alpha-3}.
\end{aligned}$$

Hier setzen wir nun die Kurve ein.

$$\left(h \circ \gamma_\alpha\right)(t) = 2\alpha^3 \left(t^\alpha\right)^{2-\frac{6}{\alpha}} (t)^3 - 2\alpha^2 \left(t^\alpha\right)^3 (t)^{-\alpha-3} = \alpha^2 \left(2\alpha - 2\right) t^{2\alpha-3}$$

Nun können wir das Wegintegral berechnen.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\alpha} \langle F(s), G_\alpha(s)\rangle \,\mathrm{d}s &= \int_0^1 \left(h \circ \gamma_\alpha\right)(t) \|\dot{\gamma}_\alpha(t)\|_2 \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \alpha^2 \left(2\alpha - 2\right) t^{2\alpha-3} \sqrt{1 + \alpha^2 t^{2\alpha-2}} \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Um dieses Integral zu berechnen substituieren wir den Ausdruck unter der Wurzel $\xi = 1 + \alpha^2 t^{2\alpha-2}$, $\mathrm{d}t = \left(\alpha^2 \left(2\alpha - 2\right) t^{2\alpha-3}\right)^{-1} \mathrm{d}\xi$. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_\alpha} \langle F(s), G_\alpha(s)\rangle \,\mathrm{d}s &= \int_1^{1+\alpha^2} \sqrt{\xi} \,\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{2}{3}\left(\left(1+\alpha^2\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5.

Um auf Bogenlänge zu parametrisieren, berechnen wir zuerst die Bogenlänge.

$$
\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \|\dot\gamma(\tau)\|_2 \,\mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^t \left((\lambda \exp(\lambda\tau)\cos(\tau) - \exp(\lambda\tau)\sin(\tau))^2 + (\lambda \exp(\lambda\tau)\sin(\tau) + \exp(\lambda\tau)\cos(\tau))^2 \right) \mathrm{d}\tau \\
&= \sqrt{1+\lambda^2} \int_0^t \exp(\lambda\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \sqrt{1+\lambda^{-2}}\,(\exp(\lambda t) - 1)
\end{aligned}
$$

Hiervon bilden wir nun die Umkehrfunktion

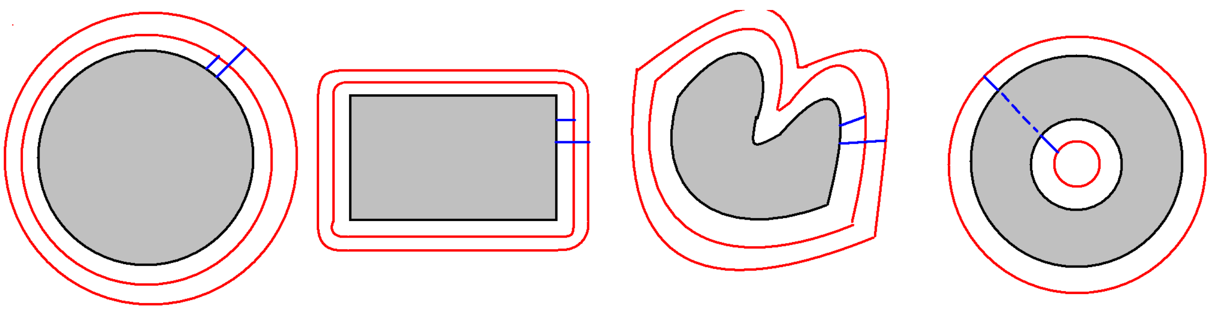
$$
t(s) = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{s}{\sqrt{1+\lambda^{-2}}} + 1 \right)
$$

und setzen dieses in die Kurve ein:

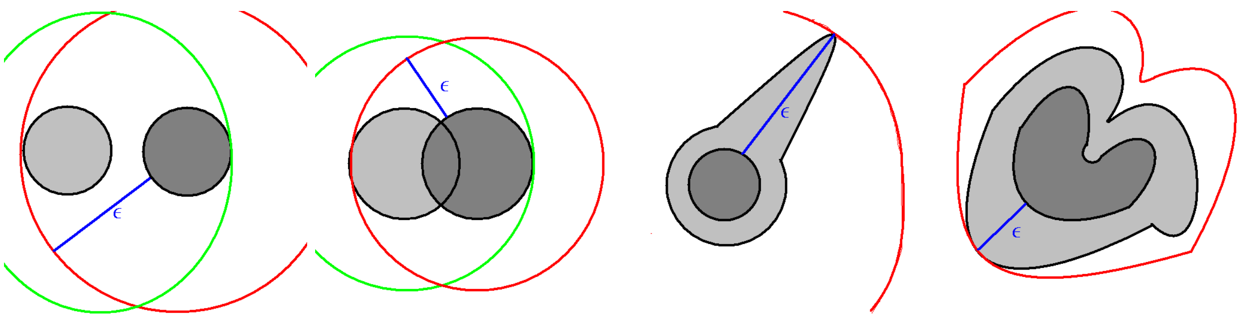
$$
(\gamma \circ t)(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{1+\lambda^{-2}}} + 1 \right) \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{s}{\sqrt{1+\lambda^{-2}}}+1\right)\right) \\ \sin\left(\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{s}{\sqrt{1+\lambda^{-2}}}+1\right)\right) \end{pmatrix}.
$$

Diese Kurve ist nun auf Bogenlänge parametrisiert.

Aufgabe 6.

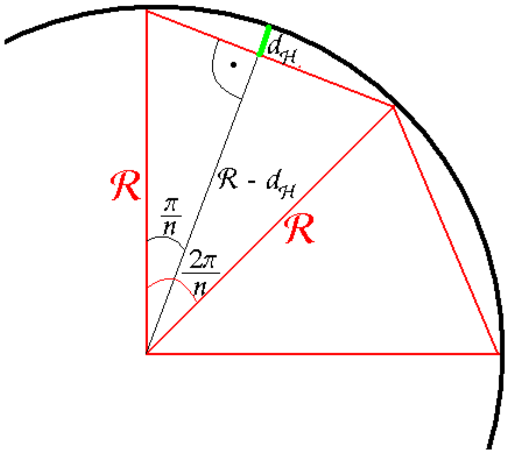


a)



b)

c) Da die n-Ecke ganz im Kreis liegen, ist anschaulich sofort klar, dass der Hausdorffabstand der größten Entfernung vom n-Eck-Rand zum Kreisrand entspricht.



Aus der Abbildung sieht man sofort, dass der Hausdorffabstand mit trigonometrischen Beziehungen berechnet werden kann:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{R - d_{\mathrm{H}}}{R} \quad \Leftrightarrow \quad d_{\mathrm{H}} = R\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\lim_{n\to\infty} d_{\mathrm{H}}(P_n, C) = \lim_{n\to\infty} R\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) = 0.$$

Somit konvergiert die Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. der Hausdorffmetrik gegen den Kreis C.

Aufgabe 7.

Betrachte ein Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{C}^1[a,b]$, die gegen ein $f \in \mathcal{C}^1[a,b]$ konvergiert: $\lim\limits_{n\in\mathbb{N}} d_{\mathcal{C}^1}(f, f_n) = 0$. Dann sieht man leicht:

$$\begin{aligned}
d_{\sup}(D(f), D(f_n)) &= \sup_{x\in[a,b]} \{|(D(f))(x) - (D(f_n))(x)|\} \\
&= \sup_{x\in[a,b]} \{|f'(x) - f_n'(x)|\} \\
&\leq \sup_{x\in[a,b]} \{|f'(x) - f_n'(x)| + |f(x) - f_n(x)|\} \\
&= d_{\mathcal{C}^1}(f, f_n)
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} d_{\sup}(D(f), D(f_n)) \leq \lim_{n\in\mathbb{N}} d_{\mathcal{C}^1}(f, f_n) = 0.$$

Aus der Positivität der Metrik folgt nun, das D stetig ist.