Christoph Niehoff
Übung Montag

Ferienkurs Analysis 2 für Physiker
SS 2011

Aufgabe 1.

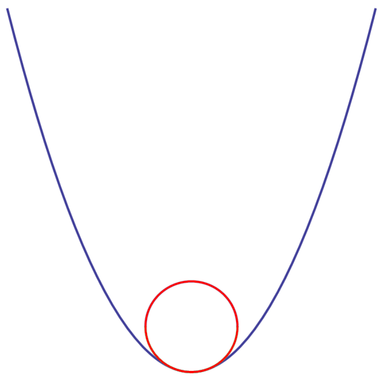
Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $a \in X$. Zeigen Sie, dass für alle $R > 0$ die offene Kugel $B_R(a) \subset X$ offen ist. D.h. zeigen Sie, dass für alle $x \in B_R(a)$ ein $\epsilon > 0$ existiert, sodass $B_\epsilon(x) \subset B_R(a)$.

Aufgabe 2.

Schätzen Sie die Länge der Spiralspur einer CD ab. Nehmen Sie folgende Abmessungen an:

Rillenabstand:	$1,6\,\mu\text{m}$
Radius:	$60\,\text{mm}$
Radius des Lochs:	$7,5\,\text{mm}$

Aufgabe 3.



Man kann in den Scheitelpunkt einer Parabel einen Kreis so hineinlegen, dass er "passgenau" reinpasst, d.h. die Kreislinie berührt den Ursprung (Kreis nicht zu groß) und "wackelt" nicht (Kreis nicht zu klein). Berechnen Sie den Radius dieser Kugel.

Aufgabe 4.

Gegeben sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (y^3, x^3)$.

a) Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} \langle F(s), \mathrm{d}s \rangle$$

über die Kurve $\gamma_\alpha(t) = (t^\alpha, t)\,,\ \ t \in [0, 1]$ in Abhängigkeit vom Parameter α.

b) Wir verwenden nun $G_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto 2\alpha^2 \left(\alpha x^{2-\frac{6}{\alpha}}, -y^{-\alpha-3}\right)$. Berechnen Sie nun das Wegintegral

$$\int_{\gamma_\alpha} \langle F(s), G_\alpha(s) \rangle \ \mathrm{d}s.$$

Aufgabe 5.

Parametrisieren Sie die exponentielle Spirale $\gamma(t) = \exp(\lambda t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0$ auf Bogenlänge.

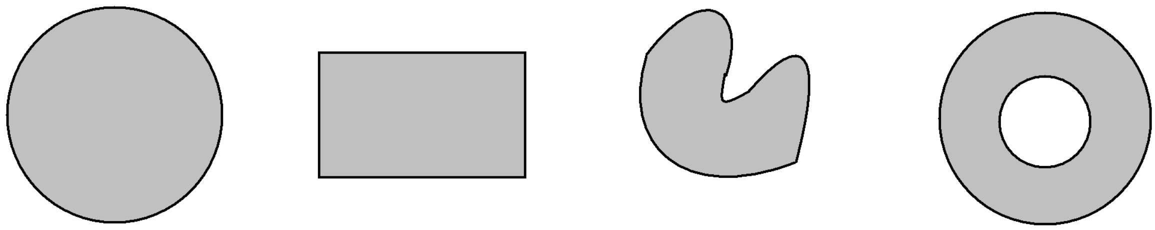
Aufgabe 6.

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir wollen eine Metrik auf dem Raum $\mathfrak{K}(X) = \{K \subset X \mid K \text{ kompakt}\}$ der kompakten Teilmengen von X definieren.

a) Zuerst definieren wir die Umgebung einer Menge. Sei $K \in \mathfrak{K}(X)$, dann nennen wir

$$\mathfrak{U}(K, \epsilon) := \bigcup_{x \in K} B_\epsilon(x)$$

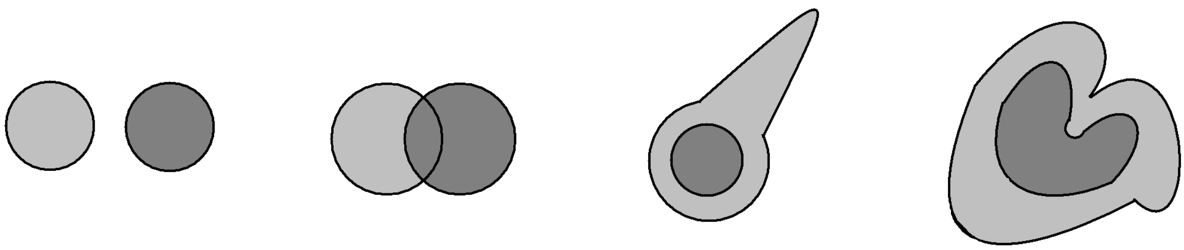
die ϵ-Umgebung der Menge K.
Zeichnen Sie einige Umgebungen für die folgenden Mengen!



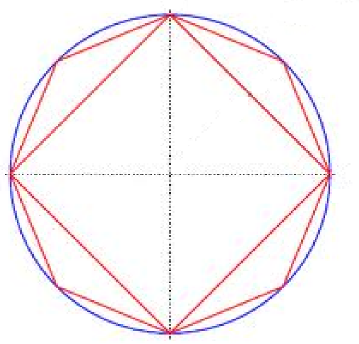
b) Nun definieren wir den *Hausdorff*-Abstand zweier Mengen $A, B \in \mathfrak{K}(X)$.

$$d_{\mathrm{H}}(A, B) := \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subseteq \mathfrak{U}(B, \epsilon), B \subseteq \mathfrak{U}(A, \epsilon)\}$$

Konstruieren Sie den Hausdorff-Abstand für folgende Mengenpaare!



c) Jetzt betrachten wir eine Folge $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathfrak{K}(X)$. Sei P_n ein regelmäßiges n-Eck, das in einen Kreis mit Radius R und dem Ursprung als Mittelpunkt einbeschrieben ist.



Man zeige, dass diese Folge bzgl. der Hausdorffmetrik gegen den Kreis C mit Radius R und dem Ursprung als Mittelpunkt konvergiert.

Aufgabe 7.

Wir versehen den Raum $\mathcal{C}^1[a,b]$ der einmal stetig differenzierbaren Funktionen $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ mit folgender Metrik:

$$d_{\mathcal{C}^1}(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}\left\{|f(x)-g(x)|+|f'(x)-g'(x)|\right\}.$$

Weiterhin betrachten wir den Raum $\mathcal{C}[a,b]$ aller stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsmetrik

$$d_{\sup}(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}\left\{|f(x)-g(x)|\right\}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung $D:\left(\mathcal{C}^1[a,b],d_{\mathcal{C}^1}\right)\to\left(\mathcal{C}[a,b],d_{\sup}\right)$, $f\mapsto f'$ stetig ist.