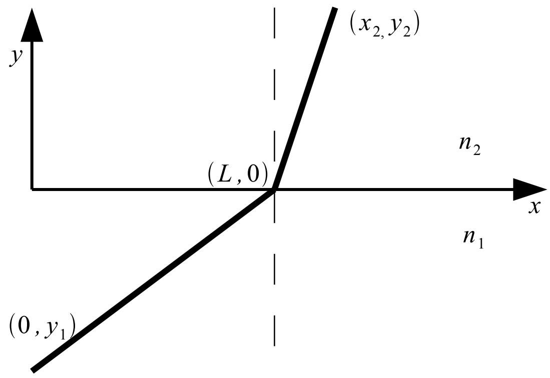
Beugung und Strahlung

Aufgabe 1

Leiten Sie des Snelliussche Brechungsgesetz aus dem Prinzip des kürzesten optischen Wegs ab.



Der optische Weg ist hier in Abhängigkeit des freien Parameters L:

$$L_{\text{opt}} = n_1\sqrt{L^2 + y_1^2} + n_2\sqrt{(x_2 - L)^2 + y_2^2}$$

Dieser soll extremal werden, die Ableitung also verschwinden:

$$\frac{\mathrm{d}L_{\text{opt}}}{\mathrm{d}L} = n_1\frac{L}{\sqrt{L^2 + y_1^2}} - n_2\frac{x_2 - L}{\sqrt{(x_2 - L)^2 + y_2^2}} = 0$$

Mit den Winkeln zum Lot $\sin\alpha_1 = \frac{L}{\sqrt{L^2+y_1^2}}$ und $\sin\alpha_2 = \frac{x_2-L}{\sqrt{(x_2-L)^2+y_2^2}}$ ergibt sich das Brechungsgesetz:

$$n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$$

Aufgabe 2

Eine ebene Welle $E\,\hat{\mathbf{e}}_y\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$ treffe auf eine leitende Platte bei $z = 0$. Diese hat zwei punktförmige Löcher bei $x = \pm a$. In sehr großen Abstand $z = b \gg a$ befindet sich ein Schirm. Bestimmen Sie die Intensitätsverteilung auf dem Schirm.

Es handelt sich hier um zwei punktförmige Löcher und das Integral kann dann mit δ-Funktionen geschrieben werden:

$$\int_L \mathrm{d}^2x = \int \mathrm{d}^3x\ [\delta(x-a) + \delta(x+a)]\,\delta(y)\delta(z)$$

Dies verwendet man zur Bestimmung des exakten Feldes hinter dem Schirm:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{E}{2\pi} \operatorname{rot}_x \int \mathrm{d}^3x' \,\hat{\mathbf{e}}_z \times \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz'} \left[\delta(x'-a) + \delta(x'+a)\right] \delta(y')\delta(z')$$

Dabei wurde die Zeitabhängigkeit weggelassen, da sie auf die Rechnung keinen Einfluss hat. Mit den Abständen $r_1 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$ und $r_2 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}$ ist das Feld dann:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{-E}{2\pi} \operatorname{rot}_x \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2}}{r_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_x$$

Auf dem Schirm ist der Einheitsvektor $\mathbf{n}_1$ vom ersten Loch zu einem Punkt auf dem Schirm ungefähr gleich dem Vektor $\mathbf{n}$ vom Ursprung zum Schirm. Der Unterschied ist von der Größe $\frac{a}{r_1}$ und nach damit vernachlässigbar. Dasselbe gilt natürlich für $\mathbf{n}_2$. Damit ist folgende Näherung möglich:

$$\operatorname{grad} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1} \approx \mathrm{i}k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1} \mathbf{n}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{i}kE}{2\pi} \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2}}{r_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_x \times \mathbf{n}$$

Wegen $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ hat das Magnetischefeld denselben Betrag und die Intensitätsverteilung auf dem Schirm $z = b$ ist mit dem Winkel θ zwischen $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\mathbf{n}$:

$$\begin{aligned}
|\langle \mathbf{S} \rangle_t| = \frac{c}{2} |\mathbf{E}|^2 = \frac{k^2 E^2 \sin^2\theta}{8\pi^2} \left| \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2}}{r_2} \right|^2 \\
&= \frac{k^2 E^2 \sin^2\theta}{8\pi^2} \left[\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos(kr_1 - kr_2) \right] \\
&= \frac{k^2 E^2 \sin^2\theta}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left[1 + \cos(kr_1 - kr_2)\right]
\end{aligned}$$

Dabei sind die Abstände immer bei $z = b$ zu nehmen. Und da der Schirm sehr weit entfernt ist kann man im Nenner $r \approx r_{1,2}$ als Abstand vom Ursprung nähern. Das erste Maximum ergibt sich bei $k(r_1 - r_2) = 2\pi$, also einer Wegdifferenz von $r_1 - r_2 = \frac{2\pi}{k} = \lambda$. Man kann bei $z = b$ noch weiter entwickeln:

$$\begin{aligned}
r_1 - r_2 &= b \left(\sqrt{1 + \frac{(x-a)^2 + y^2}{b^2}} - \sqrt{1 + \frac{(x+a)^2 + y^2}{b^2}} \right) \\
&\approx b + \frac{(x-a)^2 + y^2}{2b} - b - \frac{(x+a)^2 + y^2}{2b} = \frac{-2ax}{b} \approx \frac{-2ax}{r}
\end{aligned}$$

Damit erhält man dasselbe Ergebnis, das man mit der Berechnung der Streuamplitude in Bornscher Näherung bekommt:

$$|\langle \mathbf{S} \rangle_t| = \frac{k^2 E^2 \sin^2\theta}{4\pi^2} \frac{1}{r^2} \left[1 + \cos\left(\frac{2kax}{r}\right)\right]$$

Aufgabe 3

a) Eine relativistische bewegte Ladung q hat die Bahnkurve $\mathbf{x}(t) = vt\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_z$. Berechnen Sie die integrierten Felder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathbf{E} \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathbf{B}$$

die ein Detektor bei $\mathbf{x} = 0$ misst. Spalten Sie dazu die Felder in zu $\mathbf{v}$ parallele und senkrechte Anteile auf.

Hinweis:

$$\beta R = v(t - t_{\mathrm{ret}})$$
$$(1 - \hat{\mathbf{e}}_R \cdot \boldsymbol{\beta})R = \gamma^{-1}\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}$$
$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

b) Nun sei im Gegensatz zu a) $v \ll c$. Berechnen Sie die Energiedichte u und den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$. Wie groß ist der Energiestrom $\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ durch eine Kugeloberfläche, in deren Zentrum sich momentan die Ladung befindet?

---

a) Am Ursprung ist

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -vt_{\mathrm{ret}} \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

Mit den angegebenen Zusammenhängen ist dann das E-Feld dort:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma}{\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}^3} \begin{pmatrix} -vt \\ 0 \\ -b \end{pmatrix}$$

und das B-Feld hat wegen

$$\frac{1}{R} \begin{pmatrix} -vt_{\mathrm{ret}} \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -vt \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} = \frac{1}{c(t - t_{\mathrm{ret}})} \begin{pmatrix} 0 \\ vb(t - t_{\mathrm{ret}}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Form:

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi} \frac{\gamma b}{\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}^3} \frac{v}{c} \hat{\mathbf{e}}_y$$

Mit den Integralen

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{t}{\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}^3} \propto \sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}^{-1} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \frac{1}{\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}^3} = \frac{1}{b^2 \gamma v} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \, \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{b^2 \gamma v} \, \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{2}{b^2 \gamma v}$$

Im zweiten Integral wurde $x = \frac{\gamma v}{b} t$ substituiert. Die integrierten Felder sind dann:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathbf{E} = \frac{-2q}{4\pi b v}\hat{\mathbf{e}}_z$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathbf{B} = \frac{2q}{4\pi b c}\hat{\mathbf{e}}_y$$

b) Jetzt ist $v \ll c$ und $\gamma = 1$. Die Felder werden damit:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2+v^2t^2}^3}\begin{pmatrix} -vt \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} = \frac{q}{4\pi}\frac{-\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3}$$
$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi}\frac{b}{\sqrt{b^2+v^2t^2}^3}\frac{v}{c}\hat{\mathbf{e}}_y = \frac{q}{4\pi}\frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{-\mathbf{x}(t)}{|\mathbf{x}(t)|^3} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$$

Die Energiedichte und der Poyntingvektor sind damit:

$$u = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E^2} + \mathbf{B^2}\right) = \frac{q^2}{32\pi^2}\frac{1}{(b^2+v^2t^2)^3}\left(v^2t^2 + b^2 + b^2\frac{v^2}{c^2}\right) \approx \frac{q^2}{32\pi^2}\frac{1}{(b^2+v^2t^2)}$$
$$\mathbf{S} = c\,\mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{q^2}{32\pi^2}\frac{bv}{c(b^2+v^2t^2)^3}\begin{pmatrix} b \\ 0 \\ -vt \end{pmatrix}$$

Inspesondere ist $\mathbf{S} \cdot \mathbf{x}(t) = 0$. Dies gilt allerdings nur am Ursprung, aber man kann dieses Ergebnis leicht auf alle Punkte $\mathbf{y}$ erweitern, indem man mit $\mathbf{r}(t) = \mathbf{y} - \mathbf{x}(t)$ die Felder so schreibt:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi}\frac{\mathbf{r(t)}}{|\mathbf{r}(t)|^3}$$
$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi}\frac{\mathbf{v}}{c} \times \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|^3} = \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{E}$$

Allgemein ist also:

$$u = \frac{1}{2}\left[\mathbf{E^2} + \frac{1}{c^2}\left(\mathbf{v^2E^2} - (\mathbf{v}\cdot\mathbf{E})^\mathbf{2}\right)\right] \approx \frac{1}{2}\mathbf{E^2}$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{E})$$

Da nun $\mathbf{E} \propto \mathbf{r}(t)$ ist, gilt an jedem Punkt $\mathbf{S} \cdot \mathbf{r}(t) = 0$. D.h. aus einer Kugel um die Ladung fließt keine Energie.

Aufgabe 4

a) Ein Teilchen mit der Ladung q bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis (Radius $R \ll \frac{c}{\omega}$) erzeugt die Ladungsdichte

$$\rho(t,\mathbf{x}) = q\,\delta\left(x - R\cos(\omega t+\alpha)\right)\delta\left(y - R\sin(\omega t+\alpha)\right)\delta(z)$$

Berechnen Sie das Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ dieser Ladungsverteilung und geben Sie die komplexe Amplitude $\mathbf{p}$ von $\mathbf{p}(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{p}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\right]$. Berechnen Sie die Strahlungsleistung $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ und P.

b) Jetzt bewegen sich mehrere Teilchen äquidistant auf der Kreisbahn:

$$\rho(t,\mathbf{x}) = q\sum_{n=0}^{N-1}\delta\left(x - R\cos(\omega t+\alpha_n)\right)\delta\left(y - R\sin(\omega t+\alpha_n)\right)\delta(z)$$

mit $\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}$. Zeigen Sie, dass diese Konfiguration keine Dipolstrahlung aussendet. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse von a) und das Superpositionsprinzip.

---

a)

$$\mathbf{p}(t) = \int \mathrm{d}^3x\,\mathbf{x}\rho(t,\mathbf{x}) = R\begin{pmatrix}\cos(\omega t+\alpha)\\ \sin(\omega t+\alpha)\\ 0\end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[R\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\right]$$

Also ist

$$\mathbf{p} = R\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}$$

und demnach die Strahlungsleistung:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4}{32\pi^2c^3}\ |\mathbf{p}|^2\sin^2\vartheta = \frac{\omega^4R^2}{16\pi^2c^3}\ \sin^2\vartheta$$

$$P = \frac{\omega^4}{12\pi c^3}\ |\mathbf{p}|^2 = \frac{\omega^4R^2}{6\pi c^3}$$

b) Hier ist die komplexe Dipolamplitude nach dem Superpositionsprinzip:

$$\mathbf{p} = R\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix}\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_n}$$

Aber als geometrische Reihe ist das:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha_n} = \frac{1-\left(\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}}\right)^N}{1-\ \mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{N}}} = 0$$

Da ja $\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}} = 1$. Das Dipolmoment ist also Null.

Aufgabe 5

In einem Draht der Länge $2a$ wird durch eine Wechselspannung die oszillierende Ladungsverteilung

$$\rho(t,\mathbf{x}) = \frac{q}{2a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left[\delta(x)\delta(y)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\Theta(a-|z|)\right]$$

Wie groß ist das Dipolmoment der Ladungsverteilung? Ersetzen Sie die Ladungsverteilung durch zwei Dipole $\pm p\hat{\mathbf{e}}_z$ bei $z = \mp\frac{a}{2}$ und überlagern Sie die beiden Dipolstrahlungsfelder für $|\mathbf{x}| \gg \lambda$. Bestimmen Sie $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und die abgestrahlte Leistung $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ und P.

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(t) &= \int \mathrm{d}^3x\,\mathbf{x}\rho(t,\mathbf{x}) = \frac{q}{2\pi}\int_{-a}^{a}\mathrm{d}z\,z\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\hat{\mathbf{e}}_z \\
&= \frac{q}{2\pi}\hat{\mathbf{e}}_z\left[\frac{a}{\pi}\,z\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\Big|_{-a}^{a} - \int_{-a}^{a}\sin\left(\frac{\pi z}{a}\right)\mathrm{d}z\right] = 0
\end{aligned}$$

Da es sich hier um eine Stabantenne handelt, sollte dennoch eine Dipolstrahlung ausgesendet werden. Also ersetzt man die Antenne durch zwei Dipolmomente parallel zur z-Achse. Der Abstand zu $-p$ ist $r_1 = \sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{a}{2})^2}$ und der Abstand zu p ist $r_2 = \sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{a}{2})^2}$, die Einheitsvektoren nähert man aber jeweils mit $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}}{r}$. Denn die Korrektur dazu ist von der Ordnung $\frac{a}{r}$ und damit vernachlässigbar. Die Felder der zwei Dipole überlagern sich und ergeben das Gesamtfeld:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) &= \frac{k^2}{4\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2}}{r_2} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1}\right)(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\times\mathbf{n} \\
&= \frac{k^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_2-r)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_1-r)}\right)(\mathbf{n}\times\mathbf{p})\times\mathbf{n} \\
\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) &= \frac{k^2}{4\pi}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_2}}{r_2} - \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kr_1}}{r_1}\right)\mathbf{n}\times\mathbf{p} \\
&= \frac{k^2}{4\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kr-\omega t)}}{r}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_2-r)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_1-r)}\right)\mathbf{n}\times\mathbf{p}
\end{aligned}$$

Dabei wurde im zweiten Schritt der Abstand zum Ursprung $r \approx r_{1,2}$ eingeführt. Diese Näherung ist von der Ordnung $k(r_2 - r_1)$.
Die Felder entstehen also quasi durch einen ortsabhängigen Dipol und damit kann man wieder die Formeln für die Abgestrahlte Leistung verwenden:

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_2-r)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(r_1-r)}\right|^2 &= 2 + 2\cos\left(k(r_2-r_1)\right) \\
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{\omega^4}{16\pi^2c^3}\,|\mathbf{p}|^2\left[1+\cos\left(k(r_2-r_1)\right)\right]\sin^2\vartheta \\
P &= \frac{\omega^4}{6\pi c^3}\,|\mathbf{p}|^2\left[1+\cos\left(k(r_2-r_1)\right)\right]
\end{aligned}$$

Die beiden Dipole interferieren also miteinander.

Aufgabe 6

Gegeben sei eine optische Faser mit Brechungsindex $n(x) = \frac{n_0}{\cosh(ax)}$ und Strahlen,die in der x-z-Ebene liegen. Die Ausdehnung der Faser sei so groß, dass alle interessierenden Strahlen in ihr liegen, natürlich symmetrisch zu $x = 0$. Die Strahlen laufen in der Faser nur bis zu $x_{\max}$ mit $\bar{n} = n(x_{\max}) = n_0 \cos\theta$. Dabei ist θ der Winkel unter dem der Strahl am Anfang $z = x = 0$ die z-Achse schneidet. Dort ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\right|_{x_{\max}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right|_{x_{\max}} = 0$$

a) Man löse die Eikonalgleichung für $x(z)$ und zeige

$$ax = \operatorname{Arsinh}\left[\sinh(ax_{\max})\,\sin(az)\right]$$

Die z-Komponente der Eikonalgleichung ermöglicht die Abhängigkeit von der Bogenlänge l zu eleminieren.

Hinweis:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

b) Man bestimme die Länge Z, bei der der Strahl die z-Achse zum ersten Mal erneut schneidet. Hängt diese von $\bar{n}$ ab?

c) Man zeige, dass sich die optische Weglänge $L_{\text{opt}} = \int n(x)\,\mathrm{d}l$ für diese Strecke zu $L_{\text{opt}} = n_0 Z$ ergibt.

Hinweis: Hilfreiche Substitution

$$\sinh(ax) = \sinh(ax_{\max})\sin(t)$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{1 + a^2\sin^2\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$$

---

a) Die Strahlengleichung lautet mit der Weglänge l für die x- und z-Komponente:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(n(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\left(n(x)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\right) = 0$$

Die zweite Gleichung bedeutet, dass $n(x)\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$ konstant ist, also z.B. den Wert bei $x_{\max}$ animmt. Da dort die Ableitung 1 ist, gilt:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l} = \frac{\bar{n}}{n(x)} = \frac{\cosh(ax)}{\cosh(ax_{\max})}$$

Daher lässt sich die erste Gleichung so schreiben:

$$\frac{\bar{n}}{n(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(n(x)\frac{\bar{n}}{n(x)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right) = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}(x)$$

$$\bar{n}^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}z^2} = n(x)\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}x}(x)$$

Multipliziert man diese mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = x'$, so ergibt sich folgendes:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\bar{n}^2(x')^2 - n^2(x)\right) = 0$$

Der Term in den Klammern ist wieder konstant und gleich seinem Wert bei $x_{\max}$, nämlich $-\bar{n}^2$. Die Differentialgleichung und ihre Lösung lauten also:

$$\bar{n}^2(x')^2 = n^2(x) - \bar{n}^2$$
$$z = \int_0^x \mathrm{d}x\,\frac{\bar{n}}{\sqrt{n^2(x) - \bar{n}^2}}$$

Nach einigen Umformungen ist das:

$$z = \int_0^x \mathrm{d}x\,\frac{\cosh(ax)}{\sqrt{\sinh^2(ax_{\max}) - \sinh^2(ax)}} = \int_0^{u(x)} \mathrm{d}u\,\frac{1}{a\sqrt{1-u^2}}$$

Dabei wurde $u = \frac{\sinh(ax)}{\sinh(ax_{\max})}$ ersetzt.

$$z(x) = \frac{1}{a}\arcsin\left[\frac{\sinh(ax)}{\sinh(ax_{\max})}\right]$$

Und damit ist:

$$ax = \mathrm{Arsinh}\left[\sinh(ax_{\max})\,\sin(az)\right]$$

b) Der Strahl trifft die Achse bei $Z = 2z(x_{\max}) = \frac{\pi}{a}$ wieder.

c) Mit den Ergebnissen aus a) ist der optische Weg:

$$L_{\text{opt}} = \int n(x)\mathrm{d}l = \int \frac{n^2(x)}{\bar{n}}\mathrm{d}z = \int \frac{n^2(x)}{\bar{n}}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

Also hier

$$L_{\text{opt}} = 2\int_0^{x_{\max}} \frac{n^2(x)}{\sqrt{n^2(x) - \bar{n}^2}} = 2n_0\int_0^{x_{\max}} \mathrm{d}x\frac{\cosh(ax_{\max})}{\cosh(ax)\sqrt{\cosh^2(ax_{\max}) - \cosh^2(ax)}}$$

Mit der angegebenen Substitution

$$\sinh(ax) = \sinh(ax_{\max})\sin(t)$$
$$a\cosh(ax)\mathrm{d}x = \sinh(ax_{\max})\cos(t)\mathrm{d}t$$

kann dies in das angegebene Integral umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
L_{\mathrm{opt}} &= 2\frac{n_0}{a}\cosh(ax_{\max})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sinh^2(ax_{\max})\sin^2(t)} \\
&= \frac{n_0}{a}\frac{\cosh(ax_{\max})}{\sqrt{1+\sinh^2(ax_{\max})}}\frac{\pi}{2} = n_0\frac{\pi}{a} = n_0 Z
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass alle Strahlen, die bei $x = 0, z = 0$ gleichzeitig unter beliebigen Winkel ausgesendet wurden, miteinander bei $z = Z$ eintreffen.

Aufgabe 7

Der allgemeine Ausdruck für die spektrale Verteilung der abgestrahlten Energie einer Ladungs- und Stromverteilung

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi}\rho(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\rho(\mathbf{k},\omega)e^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
\mathbf{j}(\mathbf{x},t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi}\mathbf{j}(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)e^{-i\omega t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

mit den Fouriertransformierten

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{k},\omega) &= \int d^3x'\rho(\mathbf{x}',\omega)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} = \int d^3x'\int dt'\rho(\mathbf{x}',t')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'+i\omega t'} \\
\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega) &= \int d^3x'\mathbf{j}(\mathbf{x}',\omega)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} = \int d^3x'\int dt'\mathbf{j}(\mathbf{x}',t')e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'+i\omega t'}
\end{aligned}$$

ist gegeben durch [1]

$$\frac{d^2E}{d\omega d\Omega} \propto \omega^2\left(\left|\frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)\right|^2 - |\rho(\mathbf{k},\omega)|^2\right)$$

---

a) Unter Fouriertransformation gilt die Regel:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \to ik_j$$

Damit folgt sofort die Behauptung (das Relative $-$ kommt aus unserer Definition der Fouriertransformation $(\mathbf{x},-t) \to (\mathbf{k},\omega)$).

b) Zuerst müssen wir $\rho(\mathbf{k},\omega)$ und $\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)$ bestimmen:

$$\rho(\mathbf{k},\omega) = \int d^3x\int dt\rho(\mathbf{x},t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t}$$

[1] *Schwinger, DeRaad, Milton, Tsai: Classical Electrodynamics, Perseus Books, 1998, Kapitel 35*

a) Zeigen Sie ausgehend von der Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(t, \mathbf{x}) = 0$, dass $\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = \omega\rho(\mathbf{k}, \omega)$

b) Betrachten Sie die Energieverteilung eines idealisierten Prozess, in dem ein geladenes Teilchen seine Geschwindigkeit apprupt von dem konstanten Wert $\mathbf{v}_2$ auf den konstanten Wert $\mathbf{v}_1$ abändert, das heißt die Ladungs- und Stromverteilungen sind
$\rho = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_2 t), \quad \mathbf{j} = e\mathbf{v}_2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_2 t), \quad$ für $t < 0$
$\rho = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 t), \quad \mathbf{j} = e\mathbf{v}_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 t), \quad$ für $t > 0$
Hinweise: (i) Benutzen Sie die effektiven Integrale
$\int\limits_0^\infty dt e^{i\lambda t} = \frac{i}{\lambda}$,
$\int\limits_{-\infty}^0 dt e^{i\lambda t} = -\frac{i}{\lambda}$,
da die Strahlung zur Zeit $t = 0$ nicht davon abhängen darf, was zu unendlich fernen Zeiten passiert.
(ii) $|\mathbf{n} \times \mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|^2, \qquad \mathbf{n} =$*Einheitsvektor*

c) Finden Sie die Winkel, unter denen die maximale Energie emittiert wird
(1) im nichtrelativistischen Limes $|\mathbf{v}_i| \ll c$
(2) im ultrarelativistischen Limes $|\mathbf{v}_i| \to c$

$$= e\int d^3x \int\limits_{-\infty}^0 dt\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_2 t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t} + e\int d^3x \int\limits_0^\infty dt\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 t)e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}+i\omega t}$$

$$= e\int\limits_{-\infty}^0 dt e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2 t+i\omega t} + e\int\limits_0^\infty dt e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1 t+i\omega t}$$

Mit der Dispersionsrelation $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c}\mathbf{n}$, wobei $\mathbf{n}$ der Einheitsvektor in Detektorrichtung ist, folgt

$$\rho(\mathbf{k}, \omega) = e\int\limits_{-\infty}^0 dt e^{i\omega t\left(1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2\right)} + e\int\limits_0^\infty dt e^{i\omega t\left(1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1\right)}$$
$$= i\frac{e}{\omega}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1} - \frac{1}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2}\right)$$

Analog ergibt sich:

$$\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega) = i\frac{e}{\omega}\left(\frac{\mathbf{v}_1}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1} - \frac{\mathbf{v}_2}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2}\right)$$

Damit folgt sofort:

$$\frac{d^2E}{d\omega d\Omega} \propto \omega^2\left(\left|\frac{1}{c}\mathbf{j}(\mathbf{k}, \omega)\right|^2 - |\rho(\mathbf{k}, \omega)|^2\right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\left(|\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)|^2 - \left|\frac{c\mathbf{k}}{\omega}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)\right|^2\right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\left(|\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)|^2 - |\mathbf{n}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)|^2\right)$$

Mit Hinweis (ii) kann dies geschrieben werden als:

$$\frac{d^2E}{d\omega d\Omega} \propto \frac{e^2}{c^2}\left|\mathbf{n}\times\left(\frac{\mathbf{v}_1}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_1} - \frac{\mathbf{v}_2}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_2}\right)\right|^2$$

Dieses Ergebnis ist von ω unabhängig, die gesamte abgestrahlte Leistung divergiert also mit dem Integral über ω. Der Grund dafür liegt in unserer unphysikalischen Annahme des instantanen Geschwindigkeitswechsels. Realistischerweise findet die Beschleunigung in einem gewissen Zeitintervall T statt und das Ergebnis gilt nur für ω mit $\omega \ll 1/T$.

c) (1) Im nichtrelativistischen Limes ist die abgestrahlte Energie

$$\frac{d^2E}{d\omega d\Omega} \propto \frac{e^2}{c^2}|\mathbf{n}\times(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)|^2 = \frac{e^2}{c^2}(\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)^2\sin^2\vartheta$$

wobei ϑ der Winkel zwischen $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{n}$ ist. Das abgestrahlte Energie wird demnach für $\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{n}$ maximal.

(2) Beide Nenner haben die Form

$$1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_i = 1-\frac{|\mathbf{v}_i|}{c}\cos\vartheta_i, \qquad\qquad i=1,2$$

wobei ϑ_i der Winkel zwischen $\mathbf{v}_i$ und $\mathbf{n}$ ist. Für $\mathbf{n}\approx\mathbf{v}_i/|\mathbf{v}_i|$, wo wir also das Maximum erwarten, dominiert jeweils einer der beiden Terme.

$$\frac{d^2E}{d\omega d\Omega} \underbrace{\propto}_{\mathbf{n}\approx\mathbf{v}_i/|\mathbf{v}_i|} e^2\left|\mathbf{n}\times\frac{\mathbf{v}_i/c}{1-\frac{1}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_i}\right|^2 = e^2\frac{v_i^2}{c^2}\frac{\sin^2\vartheta_i}{\left(1-\frac{v_i}{c}\cos\vartheta_i\right)^2}$$

Die Bedingung für ein Extremum ist

$$\frac{d}{d\vartheta_i}\frac{\sin^2\vartheta_i}{\left(1-\frac{v_i}{c}\cos\vartheta_i\right)^2} = 0$$

$$\frac{2\sin\vartheta_i\cos\vartheta_i\left(1-\frac{v_i}{c}\cos\vartheta_i\right)^2 - 2\sin^2\vartheta_i\left(1-\frac{v_i}{c}\cos\vartheta_i\right)\frac{v_i}{c}\sin\vartheta_i}{\left(1-\frac{v_i}{c}\cos\vartheta_i\right)^4} = 0$$

$$\cos\vartheta_i\left(1-\frac{v_i}{c}\cos\vartheta_i\right) = \frac{v_i}{c}\sin^2\vartheta_i$$

$$\cos\vartheta_i = \frac{v_i}{c}(\sin^2\vartheta_i+\cos^2\vartheta_i)$$

$$\cos\vartheta_i = \frac{v_i}{c}$$

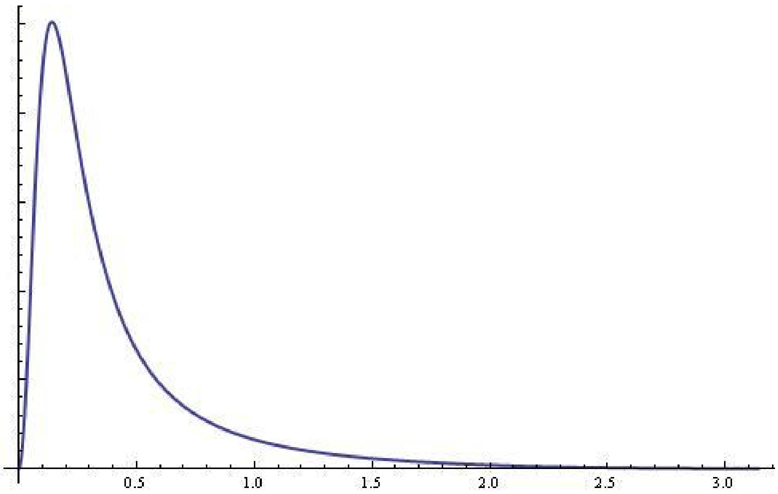


Abbildung 1: Winkelverteilung für v/c=0.99

Die Winkelverteilung für $\beta = v/c = 0.99$ ist in der Abbildung 1 dargestellt. Für größere β ist der Peak noch deutlich ausgeprägter und noch näher an $\vartheta_i = 0$.