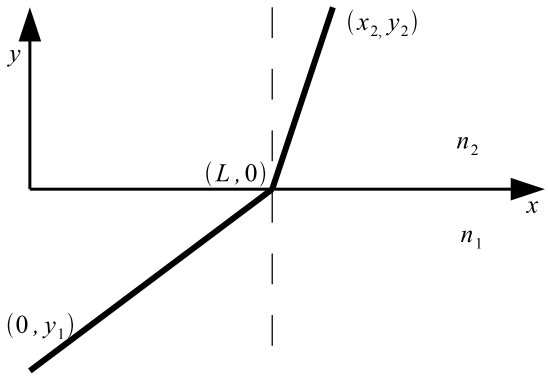
Beugung und Strahlung

Aufgabe 1

Leiten Sie des Snelliussche Brechungsgesetz aus dem Prinzip des kürzesten optischen Wegs ab.



Aufgabe 2

Eine ebene Welle $E\,\hat{\mathbf{e}}_y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}$ treffe auf eine leitende Platte bei $z = 0$. Diese hat zwei punktförmige Löcher bei $x = \pm a$. In sehr großen Abstand $z = b \gg a$ befindet sich ein Schirm. Bestimmen Sie die Intensitätsverteilung auf dem Schirm.

Aufgabe 3

a) Eine relativistische bewegte Ladung q hat die Bahnkurve $\mathbf{x}(t) = vt\hat{\mathbf{e}}_x + b\hat{\mathbf{e}}_z$. Berechnen Sie die integrierten Felder

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathbf{E} \qquad \text{und} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\mathbf{B}$$

die ein Detektor bei $\mathbf{x} = 0$ misst. Spalten Sie dazu die Felder in zu $\mathbf{v}$ parallele und senkrechte Anteile auf.

Hinweis:

$$\beta R = v(t - t_{\text{ret}})$$
$$(1 - \hat{\mathbf{e}}_R \cdot \boldsymbol{\beta}) R = \gamma^{-1}\sqrt{b^2 + \gamma^2 v^2 t^2}$$
$$\int \mathrm{d}x \, \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

b) Nun sei im Gegensatz zu a) $v \ll c$. Berechnen Sie die Energiedichte u und den Poynting-Vektor $\mathbf{S}$. Wie groß ist der Energiestrom $\int_{\partial V} \mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{S}$ durch eine Kugeloberfläche, in deren Zentrum sich momentan die Ladung befindet?

Aufgabe 4

a) Ein Teilchen mit der Ladung q bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω auf einem Kreis (Radius $R \ll \frac{c}{\omega}$) erzeugt die Ladungsdichte

$$\rho(t, \mathbf{x}) = q\,\delta\left(x - R\cos(\omega t + \alpha)\right)\delta\left(y - R\sin(\omega t + \alpha)\right)\delta(z)$$

Berechnen Sie das Dipolmoment $\mathbf{p}(t)$ dieser Ladungsverteilung und geben Sie die komplexe Amplitude $\mathbf{p}$ von $\mathbf{p}(t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{p}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega}\right]$. Berechnen Sie die Strahlungsleistung $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ und P.

b) Jetzt bewegen sich mehrere Teilchen äquidistant auf der Kreisbahn:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = q\sum_{n=0}^{N-1} \delta\left(x - R\cos(\omega t + \alpha_n)\right)\delta\left(y - R\sin(\omega t + \alpha_n)\right)\delta(z)$$

mit $\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}$. Zeigen Sie, dass diese Konfiguration keine Dipolstrahlung aussendet. Verwenden Sie dazu die Ergebnisse von a) und das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 5

In einem Draht der Länge $2a$ wird durch eine Wechselspannung die oszillierende Ladungsverteilung

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \frac{q}{2a}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\left[\delta(x)\delta(y)\cos\left(\frac{\pi z}{a}\right)\Theta(a - |z|)\right]$$

Wie groß ist das Dipolmoment der Ladungsverteilung? Ersetzen Sie die Ladungsverteilung durch zwei Dipole $\pm p\hat{\mathbf{e}}_z$ bei $z = \mp\frac{a}{2}$ und überlagern Sie die beiden Dipolstrahlungsfelder für $|\mathbf{x}| \gg \lambda$. Bestimmen Sie $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ und die abgestrahlte Leistung $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega}$ und P.

Aufgabe 6

Gegeben sei eine optische Faser mit Brechungsindex $n(x) = \frac{n_0}{\cosh(ax)}$ und Strahlen,die in der x-z-Ebene liegen. Die Ausdehnung der Faser sei so groß, dass alle interessierenden Strahlen in ihr liegen, natürlich symmetrisch zu $x = 0$. Die Strahlen laufen in der Faser nur bis zu x_{max} mit $\bar{n} = n(x_{\mathrm{max}}) = n_0 \cos\theta$. Dabei ist θ der Winkel unter dem der Strahl am Anfang $z = x = 0$ die z-Achse schneidet. Dort ist

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\right|_{x_{\mathrm{max}}} = 1 \qquad \text{und} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\right|_{x_{\mathrm{max}}} = 0$$

a) Man löse die Eikonalgleichung für $x(z)$ und zeige

$$ax = \mathrm{Arsinh}\left[\sinh(ax_{\mathrm{max}})\,\sin(az)\right]$$

Die z-Komponente der Eikonalgleichung ermöglicht die Abhängigkeit von der Bogenlänge l zu eleminieren.

Hinweis:

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

b) Man bestimme die Länge Z, bei der der Strahl die z-Achse zum ersten Mal erneut schneidet. Hängt diese von $\bar{n}$ ab?

c) Man zeige, dass sich die optische Weglänge $L_{\mathrm{opt}} = \int n(x)\,\mathrm{d}l$ für diese Strecke zu $L_{\mathrm{opt}} = n_0 Z$ ergibt.

Hinweis: Hilfreiche Substitution

$$\sinh(ax) = \sinh(ax_{\mathrm{max}})\sin(t)$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\phi}{1 + a^2\sin^2\phi} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$$

Aufgabe 7

Der allgemeine Ausdruck für die spektrale Verteilung der abgestrahlten Energie einer Ladungs- und Stromverteilung

$$\rho(\mathbf{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\rho(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\rho(\mathbf{k},\omega)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$
$$\mathbf{j}(\mathbf{x},t) = \int \frac{d\omega}{2\pi}\mathbf{j}(\mathbf{x},\omega)e^{-i\omega t} = \int \frac{d\omega}{2\pi}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega)e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

mit den Fouriertransformierten

$$\rho(\mathbf{k},\omega) = \int d^3x' \rho(\mathbf{x}',\omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} = \int d^3x' \int dt' \rho(\mathbf{x}',t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'+i\omega t'}$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega) = \int d^3x' \mathbf{j}(\mathbf{x}',\omega) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} = \int d^3x' \int dt' \mathbf{j}(\mathbf{x}',t') e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'+i\omega t'}$$

ist gegeben durch [1]

$$\frac{d^2E}{d\omega d\Omega} \propto \omega^2 \left(\left| \frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{k},\omega) \right|^2 - |\rho(\mathbf{k},\omega)|^2 \right)$$

a) Zeigen Sie ausgehend von der Kontinuitätsgleichung $\nabla \cdot \mathbf{j}(t,\mathbf{x}) + \frac{\partial}{\partial t}\rho(t,\mathbf{x}) = 0$, dass $\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}(\mathbf{k},\omega) = \omega\rho(\mathbf{k},\omega)$

b) Betrachten Sie die Energieverteilung eines idealisierten Prozess, in dem ein geladenes Teilchen seine Geschwindigkeit apprupt von dem konstanten Wert $\mathbf{v}_2$ auf den konstanten Wert $\mathbf{v}_1$ abändert, das heißt die Ladungs- und Stromverteilungen sind
$\rho = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_2 t), \quad \mathbf{j} = e\mathbf{v}_2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_2 t), \quad$ für $t < 0$
$\rho = e\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 t), \quad \mathbf{j} = e\mathbf{v}_1\delta(\mathbf{x} - \mathbf{v}_1 t), \quad$ für $t > 0$
Hinweise: (i) Benutzen Sie die effektiven Integrale
$\int\limits_0^\infty dt e^{i\lambda t} = \frac{i}{\lambda}$,
$\int\limits_{-\infty}^0 dt e^{i\lambda t} = -\frac{i}{\lambda}$,
da die Strahlung zur Zeit $t = 0$ nicht davon abhängen darf, was zu unendlich fernen Zeiten passiert.
(ii) $|\mathbf{n} \times \mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}|^2, \qquad \mathbf{n} =$ *Einheitsvektor*

c) Finden Sie die Winkel, unter denen die maximale Energie emittiert wird
(1) im nichtrelativistischen Limes $|\mathbf{v}_i| \ll c$
(2) im ultrarelativistischen Limes $|\mathbf{v}_i| \to c$

[1] *Schwinger, DeRaad, Milton, Tsai: Classical Electrodynamics, Perseus Books, 1998, Kapitel 35*