1 Skineffekt

a) Direkt an der Grenzfläche liegt das magnetische Feld $\mathbf{H}$ (z = 0) = $H_0\hat{e}_x exp(-i\omega t)$ an, mit H_0 als Amplitude im Medium. Das physikalische Feld $\mathbf{H}$(z, t) im Halbraum z > 0 setzt man mit:

$$\mathbf{H}(z>0) = H_0\hat{e}_x exp(ik(\omega)z - i\omega t) \tag{1}$$

an. Die Wellenzahl lässt sich mit Hilfe der quasistatischen Näherung umschreiben zu:

$$k(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c} = \sqrt{\epsilon(\omega)\mu(\omega)}\frac{\omega}{c} = \sqrt{\frac{\sigma\mu(\omega)\omega}{\epsilon_0}}\frac{\sqrt{i}}{c} = \frac{1+i}{\delta} \tag{2}$$

mit der Skintiefe:

$$\delta = c\sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\sigma\mu(\omega)\omega}} \tag{3}$$

Diese Begriffswahl wird dann deutlich, wenn man das magnetische Feld betrachtet:

$$\mathbf{H}(z>0) = H_0\hat{e}_x exp(i\frac{1+i}{\delta}z - i\omega t) = H_0\hat{e}_x exp(-\frac{z}{\delta}exp(i\frac{z}{\delta} - i\omega t) \tag{4}$$

es liegt also eine mittlere Eindringtiefe des magnetischen Feldes von δ vor. Für den relevanten Realteil von $\mathbf{H}$ folgt:

$$\mathbf{H}(z>0) = H_0\hat{e}_x exp(-\frac{z}{\delta})cos(\frac{z}{\delta} - \omega t) \tag{5}$$

b) Unter Vernachlässigung des Verschiebungstroms lässt sich die Maxwell-Gleichung schreiben als:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_{frei} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D} = \mathbf{j}_{frei} = \sigma\mathbf{E} \tag{6}$$

Mit $\mathbf{H} = H(z)\hat{e}_x$ verbleibt im Kreuzprodukt lediglich die y-Komponente und es ergibt sich:

$$\mathbf{E} = -\frac{H_0}{\sigma\delta}exp(-\frac{z}{\delta}[cos(\frac{z}{\delta} - \omega t) + sin(\frac{z}{\delta} - \omega t)]\hat{e}_y = -\sqrt{2}\frac{H_0}{\sigma\delta}exp(-\frac{z}{\delta})cos(\frac{z}{\delta} - \omega t - \frac{\pi}{4})\hat{e}_y. \tag{7}$$

Um die Stärke der Felder zu vergleichen, bestimmt man den Quotienten:

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = \frac{|\mathbf{E}|}{\mu\mu_0|\mathbf{H}|} = \frac{\sqrt{2}}{\mu\mu_0\sigma\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\mu\mu_0\sigma\delta}\frac{\delta^2\omega\sigma\mu}{2\epsilon_0 c^2} = \frac{\delta\omega}{\sqrt{2}} << c \tag{8}$$

die angegebene Ungleichung ist also erfüllt. In obiger Gleichung wurde eine 1 auf Basis des Ausdrucks der Skintiefe eingeschoben.

2 Feldverteilung eines Kastens

(a) Wendet man den Laplace-Operator Δ auf X (x) Y (y) Z (z) an, so entstehen drei Terme, wobei z.B. d/dx nur auf X(x) wirkt, und somit folgt:

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2} + XZ\frac{d^2Y}{dy^2} + XY\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \text{ bzw. } \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \tag{9}$$

Der i-te Term ist dabei eine Funktion der Variable x_i und da die Summe aller drei Terme konstant Null ist, ist jeder der Einzelsummanden identisch mit einer Konstanten C_i.

(b) O.B.d.A. wählt man den Anteil der x-Komponente aus und gewinnt aus $X'' = C_x X$ die allgemeine Lösung:

$$X = A_x e^{\alpha_x x} + B_x e^{-\alpha_x x}, \tag{10}$$

mit $\alpha_x = \sqrt{C_x}$ im Allgemeinen komplex. Analog gilt:

$$Y = A_y e^{\alpha_y y} + B_y e^{-\alpha_y y} \text{ und } Z = A_z e^{\alpha_z z} + B_z e^{-\alpha_z z} \tag{11}$$

Um die Koeffizenten in Relation zueinander zu setzen, betrachtet man imfolgenden die Erdungsbedingungen an den fünf Seiten mit $\Phi = 0$.

Zunächst die Fläche mit x = 0, dort gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \Phi(0,\cdot,\cdot) = (A_x + B_x)\left(A_y e^{\alpha_y \cdot} + B_y e^{-\alpha_y \cdot}\right)\left(A_z e^{\alpha_z \cdot} + B_z e^{-\alpha_z \cdot}\right), \tag{12}$$

also $A_x = -B_x$ (die Zeichen „·“ stehen für beliebig auf der Fläche positionierte Werte von y und z). Mit den gleichen Bedingungen an die Fläche bei y = 0 und z = 0 gilt: $A_y = -B_y$ und $A_z = -B_z$. Weiter betrachtet man die Seitenwände bei x = a und y = b, dort gilt:

$$0 \stackrel{!}{=} \Phi(a,\cdot,\cdot) = A_x A_y A_z \left(e^{\alpha_x a} - e^{-\alpha_x a}\right)\left(e^{\alpha_y \cdot} - e^{-\alpha_y \cdot}\right)\left(e^{\alpha_z \cdot} - e^{-\alpha_z \cdot}\right), \tag{13}$$

daher ergibt sich die Wahl: $\alpha_x = i\frac{n\pi}{a}$ und analog $\alpha_y = i\frac{m\pi}{b}$, mit n,m $= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(c) Daraus motiviert sich die folgende Darstellung des elektrischen Potentials:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{nm} \Phi_{nm}(\mathbf{r}), \tag{14}$$

mit der folgenden Funktion:

$$\Phi_{nm}(x,y,z) = A_{nm} sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) sinh(\gamma_{nm} z). \tag{15}$$

Dabei wurden der Vorfaktor $A_{nm} = -8A_x A_y A_z$ und:

$$\gamma_{nm} = \pi\sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2} \tag{16}$$

eingeführt. Letzere Identität folgt aus $\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2 = 0$, vgl. (12) und die allgemeinen Ansätze für X, Y und Z.

(d) Um A_{nm} zu bestimmen benötigt man die letzte verbleibende Randbedingung des Deckels bei z = c. Es gilt:

$$\Phi(x,y,c) = \sum_{nm} \Phi_{nm}(x,y,c) = \sum_{nm} A_{nm} sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) sin\frac{m\pi y}{b} sinh(\gamma_{nm} c) = \Phi_{Deckel}(x,y). \tag{17}$$

Diese Gleichung integriert man über $\overset{a}{\underset{0}{int}} dx sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \overset{b}{\underset{0}{int}} dy sin\left(\frac{m'\pi y}{a}\right)$ und erhält mit den angegebenen Hilfsintergralen:

$$\int dx sin(ux) sin(vx) = \frac{sin[(u-v)x]}{2(u-v)} - \frac{sin[(u+v)x]}{2(u+v)}, |u| \neq |v| \tag{18}$$

$$\int dx sin^2(ux) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4u} sin(2ux), \tag{19}$$

das Ergebnis (dabei verwendet man im Fall n'$\neq$ n bzw. m' $\neq$ m das erste der angegebenen Integrale und erhält den Wert Null, da die Sinus-Funktionen im Zähler entweder bei 0 oder einem Vielfachen von π ausgewertet werden; für n' = n bzw. m' = m benützt man das zweite Hilfsintegral, wobei jedoch nur der erste Anteil a/2 bzw. b/2 verbleibt, da der Sinus abermals verschwindet):

$$A_{n'm'} sinh(\gamma_{n'm'} c)\frac{a}{2}\frac{b}{2} = \int_0^a dx sin\left(\frac{n'\pi x}{a}\right) \int_0^b dy sin\left(\frac{m'\pi y}{b}\right) \Phi_{Deckel}(x,y). \tag{20}$$

Für den Vorfaktor A_{nm} folgt die gesuchte Formel:

$$A_{nm} = \frac{4}{absinh(\gamma_{nm}c)} \int_0^a dx \int_0^b dy \Phi_{Deckel}(x,y) sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{21}$$

Wird nun abschließend die konkrete Gestalt von Φ_{Deckel} eingesetzt, so ergibt sich:

$$A_{nm} = \frac{4}{absinh(\gamma_{nm}c)} \int_0^a dx \int_0^b dy \Phi_0 sin\left(\frac{x\pi}{a}\right) sin\left(\frac{y\pi}{b}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) = \frac{\Phi_0}{sinh(\gamma_{nm}c)} \delta_{n1}\delta_{m1}, \tag{22}$$

und für das Gesamtpotential erhält man:

$$\Phi(x,y,z) = \Phi_0 sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{sinh(\gamma_{11}z)}{sinh(\gamma_{11}c)} \tag{23}$$

3 Schwingungstypen in Rechteckwellenleitern

O.B.d.A. nehmen wir an, a>b.

- **TE-Moden ($E_z = 0$)** Wir lösen dann folgende Eigenwertgleichung:

$$-\nabla^2_{x,y}\psi = \lambda_n \psi \text{ wobei } \psi = B_z(x,y) \tag{24}$$

  Diese Gleichung unterligt bei x = 0, a und y = 0, b der Neumann-Randbedingung, d.h. $\partial_n \psi \mid_S = 0$. Die Lösung für ψ hat daher die Gestalt:

$$\psi(x,y) \propto \cos\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) \text{ mit } n_{1,2} = 0,1,2\cdots \tag{25}$$

  Die Lösungen mit $n_1 = n_2 = 0$ sind ausgeschlossen, denn dann wäre B_z = const und daher **E**=0 (statischer Fall).

  Die Eigenwerte der Gleichung sind:

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right) \text{ mit } n = (n_1, n_2) \tag{26}$$

  die Grenzfrequenz aus dem Skript:

$$\omega_n = c\sqrt{\lambda_n} = c\pi \sqrt{\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right)} \tag{27}$$

  kleinster Eigenwert ist dann $\lambda^{(TE)_{10}} = \frac{\pi^2}{a^2}$ für die $TE_{1,0}$-Mode (bzw. die kleinste Frequenz $\omega_{1,0} = \frac{c\pi}{a}$).

- **TM-Moden ($B_z = 0$)** Die zu lösende Eigenwertgleichung bleibt dieselbe. Die Gleichung unterligt nun aber der Dirichlet-Randbedingung, d.h. $psi \mid_S = 0$. Die Lösung für ψ hat daher die Gestalt:

$$\psi_{TM}(x,y) \propto \sin\left(\frac{n_1 \pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_2 \pi y}{b}\right) \text{ mit } n_{1,2} = 0,1,2\cdots \tag{28}$$

  Die Eigenwerte der Gleichung sind dieselbe:

$$\lambda_n = \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2}\right) \text{ mit } n = (n_1, n_2) \tag{29}$$

  aber der kleinste Eigenwert ist dann $\lambda^{(TM)_{11}} = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) > \lambda^{TE}_{min}$. D.h. für das Frequenzbereich von $\omega_{min} = c\frac{\pi}{a}$ bis $\omega = \omega_{min}\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2\right)^{1/2}$ gibt es nur $TE_{1,0}$-Moden.

4 Streuung von Licht an einem Atom

(a) Die klassische Bewegungsgleichung des harmonisch gebundenen Elektrons im Atom lautet:

$$m_0\left(\ddot{\mathbf{r}} + \gamma\,\dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2\mathbf{r}\right) = -e\mathbf{E}_0(t) \tag{30}$$

Unter Vernachlässigung des Phasenanteils $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$ wählt man für die Auslenkung des Elektrons und das einfallende Feld die Ansätze:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 e^{-i\omega t} \text{ und } \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{31}$$

und erhält für die maximale Auslenkung des Elektrons:

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{e/m_0}{(\omega_0^2-\omega^2) - i\omega\gamma}\mathbf{E}_0. \tag{32}$$

(b) Der Poynting-Vektor bestimmt sich über das Kreuzprodukt der Realteile von $\mathbf{E}$ - und $\mathbf{H}$ -Feld. Mit der Formel aus dem Skript folgt:

$$\mathbf{S} = \frac{k^4|p0|^2}{2(4\pi\epsilon_0 r)^2\mu_0} sin^2(\theta)\hat{e}_r. \tag{33}$$

Der Winkel θ bezeichne den Zwischenwinkel zwischen $\hat{e}_r$ und $\mathbf{p}_0$. O.B.d.A. liege $\mathbf{p}_0$ auf der z-Achse. Für die abgestrahlte Leistung folgt:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{k^4|p0|^2}{2(4\pi\epsilon_0)^2\mu_0} sin^2(\theta). \tag{34}$$

(c) Das für die elektrische Dipolstrahlung entscheidende Dipolmoment $\mathbf{p}_0$ wird über die komplexe Auslenkung des Elektrons $\mathbf{r}_0$ bestimmt: $\mathbf{p}_0 = -e\mathbf{r}_0$.
Es folgt somit für sein Betragsquadrat:

$$|\mathbf{p}_0|^2 = \frac{e^4/m_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}E_0^2 \tag{35}$$

Das einstrahlende Lichtfeld besitzt selber einen Poynting-Vektor, nämlich - hier bereits nur sein Betrag und auch schon zeitgemittelt:

$$\bar{S}_{einf} = \frac{1}{2\mu_0}E_0^2 \tag{36}$$

Damit ergibt sich für den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Ausdruck:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4|p_0|^2}{(4\pi\epsilon_0)^2E_0^2} sin^2(\theta) = \frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m_0^2 c^4}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\sin^2(\theta) \tag{37}$$

Die Integration über den gesamten Raumwinkel ergibt den totalen Wirkunsquerschnitt:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 m_0^2 c^4}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} = \bar{\sigma}\frac{\omega^4}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \tag{38}$$

Das Maximum liegt bei:

$$\omega_{max} = \frac{\sqrt{2}\omega_0^2}{\sqrt{2\omega_0^2-\gamma^2}} \text{ mit dem maximalen Wirkungsquerschnitt von: } \sigma_{max} = \bar{\sigma}\frac{4\omega_0^2}{4\omega_0^2\gamma^2-\gamma^4} \tag{39}$$

Abschließend betrachtet man noch die beiden Grenzfälle:

- ω »ω_0 (Thomson-Streuung): hier kann man den frequenzabhängigen Faktor für große Frequenzen mit 1 nähern, so dass für den totalen Wirkungsquerschnitt gilt:

$$\sigma_{Th} = \bar{\sigma} = const. \tag{40}$$

- ω »ω_0 (Rayleigh-Streuung): der frequenzabhängige Faktor ist proportional zu ω^4 und es folgt:

$$\sigma_{Ra} = \bar{\sigma}\frac{\omega^4}{\omega_0^4} \tag{41}$$

5 Streuung an einer dielektrischen Kugel

Wirqungsquerschnitt aus dem Skript (für $\bar{\epsilon} = 1$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{4\pi^2} |\mathbf{e}'^*|^2 |\delta\epsilon(\mathbf{q})|^2 \tag{42}$$

mit

$$\delta\epsilon(\mathbf{q}) = \int_{\text{Kugel}} d^3\ x(\epsilon - 1) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \tag{43}$$

$$= 2\pi(\epsilon - 1) \int drr^2 \int d(\cos(\theta)) e^{-iqr\cos(\theta)} = \frac{4\pi(\epsilon - 1)}{q} \int\ drr\sin(qr) \tag{44}$$

$$= \frac{4\pi(\epsilon - 1)}{q} [\frac{\sin(qr) - q\cos(qr)}{q^2}] = \frac{4\pi(\epsilon - 1)}{q^3} \sin(qR) - qR\cos(qR) \tag{45}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega}\, |_{\text{Born}} = (\epsilon - 1)^1 k^4 |\mathbf{e}'^* \cdot \mathbf{e}|^2 [\frac{\sin(qR) - qR\cos(qR)}{q^3}] \tag{46}$$