1 Skineffekt

Ein Leiter mit der Leitfähigkeit σ und magnetischer Permeabilität μ, die beide bei der betrachteten Frequenz ω reell seien, befinde sich im Halbraum z > 0. An der Grenzfläche z = 0 liegt ein räumlich homogenes, periodisch mit Frequenz ω oszillierendes **H** -Feld entlang der x-Richtung an, d.h. in komplexer Darstellung: $\mathbf{H}(z = 0) = H_0 \hat{e}_x exp(-i\omega t)$.

(a) Bestimmen Sie das physikalische Feld **H** (z, t) im Halbraum z > 0 aus der Lösung der Wellengleichung mit dem komplexen Wellenvektor k(ω) = n(ω)$\frac{\omega}{c}$. Verwenden Sie dazu die quasistatische Näherung, in der $\epsilon(\omega) = i\sigma/(\epsilon_0\omega)$ rein imaginär, $\mu(\omega)$ aber rein reel ist. Zeigen Sie, dass das Feld wie exp(-z/δ) abfällt und bestimmen Sie die entsprechende Skintiefe $\delta(\omega)$.

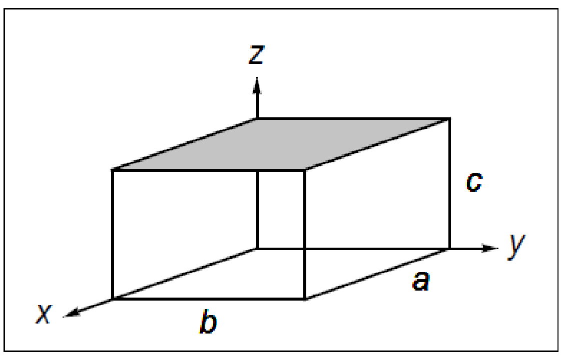
(b) Berechnen Sie unter Vernachlässigung des Maxwell'schen Verschiebungsstroms das zugehörige elektrische Feld **E** (z, t) und zeigen Sie, dass im Grenzfall quasistatischer Felder $\omega\delta$ « c die Ungleichung |**E**| « c|**B**| erfüllt ist.

2 Feldverteilung eines Kastens

Für einen Kasten der Länge a, Breite b und Höhe c sei das Potential auf der Deckelfläche parallel zur x-y-Ebene bei z = c gegeben durch:

$$\Phi_{Deckel}(x, y) = \Phi_0 \sin\left(\frac{x\pi}{a}\right) \sin\left(\frac{y\pi}{b}\right) \tag{1}$$

vgl. untenstehende Abbildung mit der grauen Deckelfläche.



Die anderen Seitenflächen der Box seien geerdet ($\Phi = 0$). Berechnen Sie die Potentialverteilung im Inneren.

(a) Beginnen Sie mit der Laplacegleichung $\Delta\Phi$(x, y, z) = 0. Zeigen Sie, dass sie durch einen Ansatz der Form Φ(x, y, z) = X (x) Y (y) Z (z) in die Form:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} + \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = 0 \tag{2}$$

gebracht werden kann, wobei die einzelnen Summanden jeweils einer Konstanten entsprechen.

(b) Zeigen Sie, dass sich die möglichen Lösungen der Gleichung darstellen lassen als X = $A_x e^{\alpha_x x} + B_x e^{-\alpha_x x}$, analog für Y und Z. Benutzen Sie die Erdungsbedingung $\Phi = 0$ für einige der Platten, um Beziehungen zwischen den Koeffizienten A_i, B_i und α_j abzuleiten.

(c) Zeigen Sie, dass sich daraus die allgemeine Lösung:

$$\Phi_{nm}(x, y, z) = A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \sinh(\gamma_{nm} z) \tag{3}$$

mit n,m $= 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ konstruieren lässt, wobei die A_{nm} aus der Potentialverteilung bei z = c folgen. Was ist γ_{nm}?

(d) Zeigen Sie, dass sich die Koeffizienten A_{nm} als:

$$A_{nm} = \frac{4}{ab\ \sinh(\gamma_{nm} c)} \int_0^a dx \int_0^b dy \Phi_{Deckel}(x,y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \tag{4}$$

darstellen lassen und geben Sie damit die komplette Potentialverteilung Φ(x, y, z) im Inneren des Kastens an.

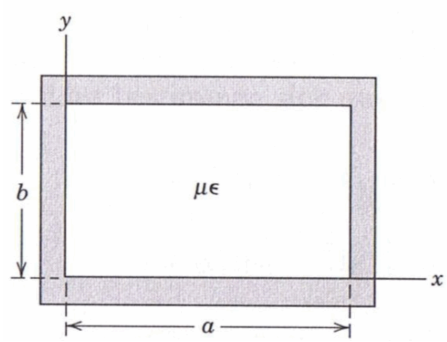
Hinweis: Hilfsintegrale:

$$\int dx \sin(ux)\sin(vx) = \frac{\sin[(u-v)x]}{2(u-v)} - \frac{\sin[(u+v)x]}{2(u+v)},\ |u| \neq |v| \tag{5}$$

$$\int dx \sin^2(ux) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4u}\sin(2ux), \tag{6}$$

3 Schwingungstypen in Rechteckwellenleitern

Der Querschnitt eines Wellenleiters habe die Gestalt eines Rechteckes mit den Seiten a und b (s. Abb.). Für das Medium innerhalb des Leiters gelte $\mu_r = \epsilon_r = 1$.



Unter der Annahme ideal leitender Wände bestimme man die möglichen Arten ausbreitungsfähiger Wellen und deren Grenzfrequenz.

4 Streuung von Licht an einem Atom

Beschreiben Sie in Dipolnäherung die Streuung von Licht an einem Atom.

(a) Nehmen Sie hierzu eine harmonische Bindung der Elektronen (Eigenfrequenz ω_0) an dem (festsitzenden) Atomrumpf an. Bestimmen Sie zunächst die maximale Auslenkung $\mathbf{r}_0$ des mit ω schwingenden Elektrons aufgrund der einfallenden ebenen Lichtwelle (Frequenz ω).

Hinweis: Setzen Sie $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$ an.

(b) Betrachten Sie nun eine harmonisch mit der Frequenz ω schwingende Ladungsverteilung und bestimmen Sie für die elektrische Dipolstrahlung E1

$$\mathbf{E}_{E1}(\mathbf{r},t) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r} k^2 (\hat{e}_r \times \mathbf{p}_0) \times \hat{e}_r \text{ und } \mathbf{B}_{E1}(\mathbf{r},t) = \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{k^2}{c} (\hat{e}_r \times \mathbf{p}_0) \tag{7}$$

die abgestrahlte Leistung pro Winkelelement $\frac{dP}{d\Omega}$ über:

$$dP = \bar{S} \cdot \hat{e}_r r^2 d\Omega \tag{8}$$

(c) Das Dipolmoment $\mathbf{p}_0$ wird im vorliegenden Fall der Streuung von Licht an einem Atom über die Auslenkung des Elektrons erzeugt:

$$\mathbf{p}_0 = -e\mathbf{r}_0 \tag{9}$$

Die durch dieses Dipolmoment erzeugte Strahlung entspricht dem gestreuten Licht. Bestimmen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt der Lichtstreuung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{abgestrahlte Leistung}/d\Omega}{\text{einfallende Leistung/Fläche}} \tag{10}$$

Eine Integration über den gesamten Raumwinkel ergibt den totalenWirkungsquerschnitt $\sigma(\omega)$. Betrachten Sie hier insbesondere die beiden Grenzfälle ω » ω_0 (Thomson-Streuung) und ω « ω_0 (Rayleigh-Streuung).

5 Streuung an einer dielektrischen Kugel

Eine ebene elektromagnetische Welle werde an einer dielektrischen Kugel mit Radius R und Dielektrizitätskonstante $\epsilon > 1$ gestreut.

(a) Berechnen Sie den differentiellen Streuquerschnitt in Born'scher Näherung für ϵ nahe eins mit beliebigem Impulsübertrag $\mathbf{q} = \mathbf{k}_0$ - $\mathbf{k}$ und Polarisationsvektoren $\mathbf{e}$ bzw. $\mathbf{e}$'. Für den Fall beliebig grosser Werte von ϵ kann der Streuquerschnitt im Grenzfall grosser Wellenlängen kR « 1 allgemein aus der Gleichung

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{k^4}{(4\pi)^2} \left|\mathbf{e}'^* \cdot \mathbf{p}_0/E_0\right|^2 \tag{11}$$

bestimmt werden. Dabei ist $E_0\mathbf{e}$ die Amplitude der einfallenden Welle und p_0 das von dem entsprechenden statischen Feld $\mathbf{E}_\infty = E_0\mathbf{e}$ induzierte Dipolmoment der Kugel.

(b) Berechnen Sie den totalen Wirkungsquerschnitt σ