

1 Brechung elektromagnetischer Wellen

a) Die Wellenzahl im Bereich $i = 1, 2, 3$ bestimmt sich über $k_i = \frac{\omega n_i}{c}$, es gilt immer $\mathbf{k}_i = k_i \hat{\mathbf{k}}$ (die Richtung des Einheitsvektors $\hat{\mathbf{k}}$ stimmt nach der Angabe mit der z-Achse \hat{e}_z überein). Eine Darstellung der ebenen Welle ist:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = n(\omega) \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad (1)$$

O.B.d.A. nehmen wir an, dass die einfallende Welle in x-Richtung linear polarisiert ist, d.h. $\mathbf{E}_0 \propto \hat{e}_x$. Für die drei Bereiche wählt man nun folgenden Ansatz:

$$z < 0 : \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik_1 z - i\omega t} + \mathbf{E}_1 e^{-ik_1 z - i\omega t}, \\ \mathbf{B} = n_1 \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 \right) e^{ik_1 z - i\omega t} - n_1 \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_1 \right) e^{-ik_1 z - i\omega t} \quad (2)$$

$$0 < z < d : \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 e^{ik_2 z - i\omega t} + \mathbf{E}_3 e^{-ik_2 z - i\omega t}, \\ \mathbf{B} = n_2 \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_2 \right) e^{ik_2 z - i\omega t} - n_2 \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_3 \right) e^{-ik_2 z - i\omega t}, \quad (3)$$

$$d < z : \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_4 e^{ik_3 z - i\omega t}, \\ \mathbf{B} = n_3 \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_4 \right) e^{ik_3 z - i\omega t}. \quad (4)$$

Die Bereiche 1 und 2 weisen eine reflektierte Welle mit $-\mathbf{k}_i$ auf und genau dieser Vorzeichenwechsel schlägt dann beim Ausdruck für das Magnetfeld zu Buche (wenn die beiden Anteile nicht addiert, sondern subtrahiert werden). Im letzten Abschnitt 3 setzt man lediglich eine transmittierte Welle an.

Da keinerlei Oberflächenströme existieren, gilt die Stetigkeit der Tangentialkomponente H_t von \mathbf{H} und daher (aufgrund der nicht-magnetischen Medien ($\mu = 1$)) auch von \mathbf{B} . Weiterhin gilt die Stetigkeit von \mathbf{E}_t .

Betrachtet man die Stetigkeitsbedingungen für das elektrische Feld, d.h. $E_t = E_x$, folgt:

$$z = 0 : \quad E_{0x} + E_{1x} = E_{2x} + E_{3x}, \quad (5)$$

$$z = d : \quad E_{2x} e^{+i\phi} + E_{3x} e^{-i\phi} = E_{4x} e^{ik_3 d} \equiv \tilde{E}_{4x}. \quad (6)$$

mit $\phi = k_2 d$. Den Zeitanteil $i\omega t$ muss man hier nicht in die Überlegungen einbinden, denn $e^{-i\omega t}$ tritt auf jeweils den beiden Seiten der Gleichungen auf und somit kürzt sich. Beim Magnetfeld betrachtet man entsprechend nur den y-Anteil $B_t = B_y$, der seinerseits (aufgrund des Kreuzprodukts von $\hat{\mathbf{k}}$ mit \mathbf{E}) nur auf den x-Komponenten des elektrischen Feldes beruht. Es gilt:

$$z = 0 : \quad n_1(E_{0x} - E_{1x}) = n_2(E_{2x} - E_{3x}), \quad (7)$$

$$z = d : \quad n_2(E_{2x} e^{+i\phi} - E_{3x} e^{-i\phi}) = n_3 E_{4x} e^{ik_3 d} \equiv n_3 \tilde{E}_{4x}. \quad (8)$$

Nun kombiniert man sowohl $n_2 \cdot (6) + (8)$, als auch $n_2 \cdot (6) - (8)$ und erhält:

$$E_{2x} = \frac{n_2 + n_3}{2n_2} \tilde{E}_{4x} e^{-i\phi} \quad \text{und} \quad E_{3x} = \frac{n_2 - n_3}{2n_2} \tilde{E}_{4x} e^{+i\phi}. \quad (9)$$

Mit (5) und (7) folgt:

$$n_1(E_{0x} + E_{1x}) = n_1 \tilde{E}_{4x} \left[\frac{n_2 + n_3}{2n_2} e^{-i\phi} + \frac{n_2 - n_3}{2n_2} e^{+i\phi} \right] = \tilde{E}_{4x} \left[n_1 \cos(\phi) - i \frac{n_1 n_3}{n_2} \sin(\phi) \right] \\ n_1(E_{0x} - E_{1x}) = E_{4x} [n_3 \cos(\phi) - i n_2 \sin(\phi)] \quad (10)$$

Addiert man die letzten beiden Zeilen, gewinnt man einen Ausdruck für \tilde{E}_{4x} in Abhängigkeit von E_{0x} :

$$\tilde{E}_{4x} = \frac{2n_1 n_2}{n_2(n_1 + n_3) \cos(\phi) - i(n_1 n_3 + n_2^2) \sin(\phi)} E_{0x}. \quad (11)$$

Mit (11) und $n_1(E_{0x} - E_{1x}) = \tilde{E}_{4x} [n_3 \cos(\phi) - in_2 \sin(\phi)]$ ergibt sich desweiteren ein Ausdruck für E_{1x} in Abhängigkeit von E_{0x} :

$$E_{1x} = \frac{n_2(n_1 - n_3) \cos(\phi) - i(n_1 n_3 - n_2^2) \sin(\phi)}{n_2(n_1 + n_3) \cos(\phi) - i(n_1 n_3 + n_2^2) \sin(\phi)} E_{0x}. \quad (12)$$

Damit wurden die reflektierte und transmittierte Feldstärke in Abhängigkeit der einfallenden Feldstärke E_{0x} ausgedrückt.

Den zeitlich gemittelten Poynting-Vektor berechnet man nun mit Hilfe der Formel aus dem Skript, also folgt:

$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{einf}} = \frac{c}{2} |E_{0x}|^2 n_1 \hat{k} \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{refl}} = \frac{c}{2} |E_{1x}|^2 n_1 \hat{k} \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{trans}} = \frac{c}{2} |\tilde{E}_{4x}|^2 n_1 \hat{k} \quad (15)$$

Für Transmission und Reflexion ergibt sich also:

$$T = \frac{\bar{S}_{\text{trans}}}{\bar{S}_{\text{einf}}} = \frac{n_3 |\tilde{E}_{4x}|^2}{n_1 |E_{0x}|^2} = \frac{4n_1 n_2^2 n_3}{n_2^2(n_1 + n_3)^2 \cos^2(\phi) + (n_1 n_3 + n_2^2)^2 \sin^2(\phi)} \quad (16)$$

$$R = \frac{\bar{S}_{\text{refl}}}{\bar{S}_{\text{einf}}} = \frac{|E_{1x}|^2}{|E_{0x}|^2} = \frac{n_2^2(n_1 - n_3)^2 \cos^2(\phi) + (n_1 n_3 - n_2^2)^2 \sin^2(\phi)}{n_2^2(n_1 + n_3)^2 \cos^2(\phi) + (n_1 n_3 + n_2^2)^2 \sin^2(\phi)} \quad (17)$$

und man erkennt, dass auch $T + R = 1$ gilt.

b) Um keine Reflektivität zu erhalten, also $R = 0$ zu erzeugen, wählen wir die Forderung $\cos^2(\phi) = 0$ und $n_2^2 = n_1$. Damit folgt: $\phi = (m + \frac{1}{2})\pi = k_2 d$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Somit ergibt sich über:

$$d = (m + \frac{1}{2}) \frac{c\pi}{\omega_0 n_2} \quad (18)$$

eine Forderung an die Dicke der Zwischenschicht in Abhängigkeit der Frequenz.

2 Metamaterial (WS. 09/10)

a) Im Medium breitet sich die Welle laut der Maxwell'schen Gleichungen aus. Die Welle wird dann wie folgt dargestellt:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \frac{c}{\omega} (\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega t} \quad (19)$$

Der zeitlich gemittelte Poynting-Vektor $\bar{\mathbf{S}}$ aus dem Skript:

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{sign}(\mu(\omega)) \frac{c}{2} \sqrt{\frac{\epsilon(\omega)}{\mu(\omega)}} |\mathbf{E}_0|^2 \hat{k} \quad (20)$$

\mathbf{k} ist also antiparallel zu \mathbf{S} , da $\mu < 0$.

b) Das Snellius-Gesetz besagt

$$\frac{\sin \alpha_i}{\sin \alpha_t} = \frac{n_2}{n_1} \quad (21)$$

mit $n_1 = 1$ folgt:

$$\sin \alpha_t = \frac{1}{n_2} \sin \alpha_i; \quad (22)$$

wobei hier sehr wichtig ist, dass der resultierende Winkel negativ ist! Bei Stoffen mit negativer Brechzahl wird ein auftreffender Lichtstrahl nicht, wie bei herkömmlichen Stoffen, zum Lot hin gebrochen, sondern über das Lot hinaus in die negative Richtung. Der Lichtstrahl befindet sich also sowohl innerhalb als auch außerhalb des Materials auf derselben Seite des Lots. Das inverse Snellius'sche Gesetz führt bei gekrümmten Flächen zu einer Vertauschung von konvergenter und divergenter Strahlführung, d. h., konkave Linsen bündeln, konvexe Linsen streuen. (s. Wikipedia. Negativer Brechungsindex)

c) Die Stetigkeitsbedingung für das E-Feld, mit \mathbf{n} als den Normaleneinheitsvektor der Grenzfläche, lautet:

$$(\mathbf{E}_{0i} + \mathbf{E}_{0r} - \mathbf{E}_{0t}) \times \mathbf{n} = 0 \quad (23)$$

Für das H-Feld ist sie:

$$\left[\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{k}_i \times \mathbf{E}_{0i} + \mathbf{k}_r \times \mathbf{E}_{0r}) - \frac{1}{\mu_2} (\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_{0t}) \right] \times \mathbf{n} = 0 \quad (24)$$

Da die Welle senkrecht polarisiert ist, vereinfacht sich das ganze zu:

$$E_{0i} + E_{0r} - E_{0t} = 0 \quad (25)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_i \underbrace{(E_{0i} - E_{0r})}_{2E_{0i} - E_{0t}} + \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} E_{0t} \cos \alpha_t = 0 \quad (26)$$

$$2\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} E_{0i} \cos \alpha_i = \left(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\mu_1}} \cos \alpha_i - \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\mu_2}} \cos \alpha_t \right) E_{0t} \quad (27)$$

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \mu_2 \cos \alpha_i}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1} \mu_2 \cos \alpha_i - \sqrt{\epsilon_2 \mu_2} \mu_1 \cos \alpha_t} \quad (28)$$

Mit dem Brechungsindex $n_2 = -\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$ und dem Snellius-Gesetz lässt sich dies nochmals vereinfachen:

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1 \mu_2 \cos \alpha_i}{n_1 \mu_2 \cos \alpha_i + n_2 \mu_1 \cos \alpha_t} \quad (29)$$

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1 \cos \alpha_i}{n_1 \cos \alpha_i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \alpha_i}} = \frac{2 \cos \alpha_i}{\cos \alpha_i - \frac{1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - \sin^2 \alpha_i}} \quad (30)$$

Wobei im letzten Schritt noch $n_1 = 1$ und $\mu_1 = 1$ eingesetzt wurde.

3 Brewster-Winkel (WS 00/01)

a) Unpolarisierte Welle kann in eine Komponente parallel zur Einfallsebene und in eine Komponente senkrecht zur Einfallsebene zerlegt werden. Beispielsweise heißt es für den Vektor des elektrischen Feldes :

$$\mathbf{E}_{0i} = \mathbf{E}_{||} + \mathbf{E}_{\perp} \quad (31)$$

Die Stetigkeitsbedingungen für die senkrecht (bzw. parallel) polarisierte Welle sind im Skript ausführlich behandelt worden. Wir schreiben hier nur die Ergebnisse auf:

senkrechte Polarisation

- die Tangentialkomponente E_t von \mathbf{E}_{\perp} ist stetig:

$$\mathbf{E}_t^{(z<0)} = \mathbf{E}_t^{(z>0)} \quad (32)$$

Unter Berücksichtigung des Satzes von Snellius kriegen wir für $z=0$:

$$1 + r = t \quad (33)$$

- Eine weitere Stetigkeitsbedingung führt für die Magnetfeldstärke \mathbf{B} zu:

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_t^{(z<0)} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_t^{(z>0)}, \text{ hier } B_t = B_x \quad (34)$$

Die letzte Gleichung kann mit Hilfe des Satzes von Faraday durch die elektrische Feldstärke umgeschrieben werden:

$$\frac{1}{\mu_1} (\mathbf{rot} \mathbf{E}^{(z<0)})_x = \frac{1}{\mu_2} (\mathbf{rot} \mathbf{E}^{(z>0)})_x \quad (35)$$

und da die Wellen in y-Richtung polarisiert sind, führt das zu $(\mathbf{rot} \mathbf{E})_x = -\partial_z E_y$. Dementsprechend bekommen wir für $z=0$:

$$k_i^z - r k_r^z = \frac{\mu_2}{\mu_1} t k_t^z \quad (36)$$

parallele Polarisation

- tangentielle Komponenten H_t von $\mathbf{H}_{||}$ sind stetig $\Rightarrow \frac{B_y}{\mu}$ stetig.
für $z=0$:

$$\frac{1}{\mu_1} (1+r) = \frac{1}{\mu_2} t \quad (37)$$

- Stetigkeit der tangentiellen Komponenten $E_t = E_x$ des elektrischen Feldes mit dem Satz von Ampère (Gleichung (iv')) aus dem Skript) erfordern

$$E_x = -\frac{c}{i\omega n^2(\omega)} \underbrace{(\mathbf{rot} \mathbf{B})_x}_{-\partial_z B_y} \quad (38)$$

für $z=0$:

$$\frac{1}{n_1^2} (k_i^z - r k_r^z) = \frac{1}{n_2^2} t k_t^z \quad (39)$$

b) O.B.d.A. breiten sich die Wellen in der Ebene senkrecht zu der y-Achse aus. An allen Punkten der Trennebene ($z=0$) zwischen zwei Medien müssen zu jeder Zeit die Grenzbedingungen erfüllt werden. Dies heißt aber, dass die Phasenfaktoren der drei Wellen übereinstimmen sollen. Bei festem ω gilt:

$$\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}|_{z=0} = \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{x}|_{z=0} = \mathbf{k}_t \cdot \mathbf{x}|_{z=0} \quad (40)$$

Die Projektion auf die x-Achse ergibt:

$$k_1 \sin \alpha_1 \stackrel{(i)}{=} k_1 \sin \alpha'_1 \stackrel{(ii)}{=} k_2 \sin \alpha_2 \quad (41)$$

Mit $k = \frac{n(\omega)\omega}{c}$ lässt sich die Gleichung (ii) umschreiben:

$$n_1 \sin \alpha'_1 = n_2 \sin \alpha_2 \quad (42)$$

Dies ist das Snellius'sche Gesetz.

c) Laut des Skriptes tritt keine reflektierte Welle bei der Polarisation der Einfallswelle in der Ebene genau dann auf, wenn der Einfallswinkel $\alpha_i^{(B)}$ die Gleichung

$$\alpha_i^{(B)} + \alpha_t^{(B)} = \frac{\pi}{2} \quad (43)$$

erfüllt.

Somit ist der Strahl einer unpolarisierten Welle nach der Reflexion vollständig linear polarisiert und sein Polarisationsvektor steht senkrecht auf der Einfallsebene.

4 Komplexer Brechungsindex

a) Die Wellenzahl im Bereich $i = I, II$ bestimmt sich über $k_i = \omega n_i / c$ ($n_I = 1$ und $n_{II} = n$), es gilt immer $\mathbf{k}_i = k_i \hat{e}_x$ und eine allgemeine Lösung der ebenen Welle ist:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = n(\omega) \left(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0 \right) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - i\omega t} \quad (44)$$

Für die beiden Bereiche wählt man nun folgenden Ansatz ($\mathbf{E}_0 = E_{0y} \hat{e}_y$):

$$x < 0 : \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{ik_I x - i\omega t} + \mathbf{E}_1 e^{-ik_I x - i\omega t}, \\ \mathbf{B} = (\hat{e}_x \times \mathbf{E}_0) e^{ik_I x - i\omega t} - (\hat{e}_x \times \mathbf{E}_1) e^{-ik_I x - i\omega t}, \quad (45)$$

$$0 < x : \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_2 e^{ik_{II} x - i\omega t}, \\ \mathbf{B} = n (\hat{e}_x \times \mathbf{E}_2) e^{ik_{II} x - i\omega t}. \quad (46)$$

Mit $\mu = 1$ und keinerlei vorhandenen Oberflächenströmen gilt die Stetigkeit der Transversalkomponenten der \mathbf{E} -, \mathbf{B} - und \mathbf{H} -Felder und es folgen (analog der Aufgabe 1. Brechung elektromagnetische Wellen) die Aussagen (für die y -Komponente der elektrischen und die z -Komponenten der magnetischen Felder):

$$E_{0y} + E_{1y} = E_{2y} \quad \text{und} \quad E_{0y} - E_{1y} = n E_{2y}. \quad (47)$$

Damit gilt:

$$E_{1y} = \frac{1-n}{1+n} E_{0y} \quad \text{und} \quad E_{2y} = \frac{2}{n+1} E_{0y}. \quad (48)$$

b) Der Anfangsamplitude des elektrischen Feldes kann eine Phase zugeordnet werden, da diese i.A. komplex ist: $E_{0y} = |E_{0y}| \exp(i\alpha)$. Ebenso mögen folgende Phasen ϕ bzgl. der Brechungsindizes definiert sein: $n = |n| \exp(i\phi_1)$ und $n+1 = |n+1| \exp(i\phi_2)$. Damit folgt für die Amplituden der Felder der transmittierten Welle:

$$E_{2y} = \frac{2}{n+1} E_{0y} = \frac{2}{|n+1|} e^{-i\phi_2} |E_{0y}| e^{i\alpha} \quad (49)$$

$$B_{2y} = \frac{2|n|}{n+1} E_{0y} = \frac{2|n|}{|n+1|} e^{-i\phi_2} |E_{0y}| e^{i\alpha} e^{i\phi_1} \quad (50)$$

Der zeitlich gemittelte Poynting-Vektor (für $x = 0$) ist:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{c}{2} \Re \left(\mathbf{E}_0 \times \frac{\mathbf{B}_0^*}{\mu(\omega)} \right) = \frac{c}{2\mu} \frac{4|n|}{|n+1|^2} |E_{0y}|^2 \operatorname{Re} (e^{-i\phi_1}) \hat{e}_x = \frac{2c|n|}{|n+1|^2 \mu} |E_{0y}|^2 \cos \phi_1 \hat{e}_x \quad (51)$$

Im Grenzfall $n_1 \ll n_2$ und $|n| \gg 1$ gilt mit:

$$\cos(\phi_1) = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \approx \frac{n_1}{n_2} \quad \text{und} \quad \frac{2|n|}{|n+1|^2} \approx \frac{2}{|n|} \approx \frac{2}{n_2} \quad (52)$$

der folgende Ausdruck:

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{2cn_1}{n_2^2 \mu} |E_{0y}|^2 \hat{e}_x \quad (53)$$

5 Wellen im leitenden Medium

(a) Wir betrachten eine Welle, die in x -Richtung propagiert, dementsprechend hängen die Größen \mathbf{E} , \mathbf{H} und \mathbf{j} nur von x (und t) ab. Aus den Gleichungen $\nabla \cdot (\mu \mathbf{H}) = 0$ und $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E})$ folgt somit:

$$\partial_x H_x + \underbrace{\partial_y H_y + \partial_z H_z}_{=0} = \partial_x H_x = 0 \quad (54)$$

$$\partial_x E_x + \underbrace{\partial_y E_y + \partial_z E_z}_{=0} = \partial_x E_x = 0 \quad (55)$$

(μ und ϵ sind konstant und können vor die Differentialoperatoren gezogen werden.)

Da \mathbf{E} und \mathbf{H} nur von x abhängen, verschwindet auch die x -Komponente von $\nabla \times \mathbf{E}$ und $\nabla \times \mathbf{H}$:

$$(\nabla \times \mathbf{E})_x = \partial_y E_z - \partial_z E_y = 0 \quad (56)$$

$$(\nabla \times \mathbf{H})_x = \partial_y H_z - \partial_z H_y = 0 \quad (57)$$

Aus den Gleichungen für $\nabla \times \mathbf{E}$ und $\nabla \times \mathbf{H}$ folgt somit:

$$\partial_t H = 0 \text{ und } -\epsilon \partial_t E_x = 4\pi j_x \quad (58)$$

Zusammen mit dem Ohmschen Gesetz erhält man die endgültige Gleichung für $\partial_t E_x$:

$$\left(\partial_t E_x + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \right) E_x = 0 \quad (59)$$

Die Gleichungen für H_x führen sofort auf $H_x = \text{const.}$ Für E_x ergibt sich als Lösung:

$$E_x(x, t) = E_x(t) = E_x(t=0) \exp\left(-\frac{4\pi\sigma t}{\epsilon}\right) \quad (60)$$

(b) Wir wählen nun

$$\mathbf{H}_\perp = \mathbf{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (61)$$

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - t)}, \quad (62)$$

und erhalten durch Einsetzen in die Gleichungen für $\nabla \times \mathbf{E}$ und $\nabla \times \mathbf{H}$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\mu}{c} \partial_t H = ik \hat{e}_x \times \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} - i\omega \frac{\mu}{c} \mathbf{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} = 0 \quad (63)$$

und unter Verwendung des Ohmschen Gesetzes

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\epsilon}{c} \partial_t E = ik \hat{e}_x \times \mathbf{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} + i\omega \frac{\epsilon}{c} \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (64)$$

Mit der ersten Gleichung kann man \mathbf{H}_0 durch \mathbf{E}_0 ausdrücken:

$$\mathbf{H}_0 = \frac{ck}{\mu\omega} \hat{e}_x \times \mathbf{E}_0 \quad (65)$$

Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt

$$i \hat{e}_x \times \left(\frac{ck^2}{\mu\omega} \hat{e}_x \times \mathbf{E}_0 \right) + i\omega \frac{\epsilon}{c} \mathbf{E}_0 = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}_0, \quad (66)$$

bzw. nach Vereinfachungen (beachte $\mathbf{E}_0 \cdot \hat{e}_x = 0$)

$$-i \frac{ck^2}{\mu\omega} \mathbf{E}_0 + i\omega \frac{\epsilon}{c} \mathbf{E}_0 = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}_0. \quad (67)$$

Auflösen nach k führt schließlich zu der auf dem Aufgabenblatt angegebenen Dispersionsrelation:

$$k^2 = \mu\omega^2 \frac{\epsilon}{c^2} + i\mu \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \quad (68)$$

(c)

$$k = \pm \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \exp \left[\frac{i}{2} \arctan \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \right] \sqrt[4]{1 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \quad (69)$$

$$\Re(k) = \pm \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \cos \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \right] \sqrt[4]{1 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \quad (70)$$

$$\Im(k) = \pm \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \right] \sqrt[4]{1 + \frac{16\pi^2\sigma^2}{\omega^2\epsilon^2}} \quad (71)$$

Im Grenzfall des schlechten Leiters gilt:

$$\Re(k) = \pm \sqrt{\mu\epsilon} \frac{\omega}{c} \text{ und } \Im(k) = 0 \quad (72)$$

Metall:

$$\Re(k) = \Im(k) = \frac{1}{c} \sqrt{2\pi\sigma\mu\omega} \quad (73)$$

(d) Mithilfe der Beziehung

$$\mathbf{H}_0 = \frac{ck}{\mu\omega} \hat{e}_x \times \mathbf{E}_0 \quad (74)$$

aus Aufgabe (b) und dem Ausdruck für k aus (c) erhält man sofort

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\phi} (\hat{e}_x \times \mathbf{E}_0), \quad (75)$$

mit der Phase

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right) \quad (76)$$

Das Verhältnis der Beträge $|\mathbf{H}_0|/|\mathbf{E}_0|$ ist

$$\frac{|\mathbf{H}_0|}{|\mathbf{E}_0|} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[2 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} \quad (77)$$

(e) Die Feldamplituden nehmen innerhalb von $\delta = 1/\Im(k)$ um einen Faktor e ab, d.h. die Eindringtiefe ist

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}} \quad (78)$$

6 Tunneleffekt

(a) Die propagierende Welle kann in die in der Abbildung dargestellten Komponenten zerlegt werden.

Diese Komponenten können wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_1 \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$$

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}, t) = n \frac{\mathbf{k}_1 \times \mathbf{E}_1(\mathbf{x}, t)}{k_1}$$

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_2 \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{x}, t) = n \frac{\mathbf{k}_2 \times \mathbf{E}_2(\mathbf{x}, t)}{k_2}$$

$$\mathbf{E}_3(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_3 \exp(i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$$

$$\mathbf{B}_3(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{k}_3 \times \mathbf{E}_3(\mathbf{x}, t)}{k_3}$$

$$\mathbf{E}_4(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_4 \exp(i\mathbf{k}_4 \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$$

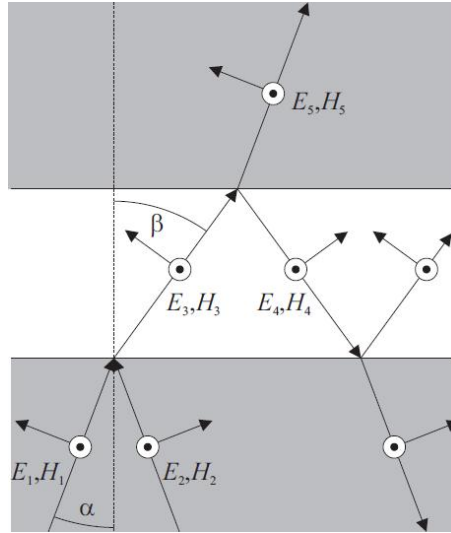


Abbildung 1: Propagationsrichtungen der verschiedenen Wellen und Orientierung der Felder (H-Feld in der Zeichenebene=x-z-Ebene).

$$\mathbf{B}_4(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{k}_4 \times \mathbf{E}_4(\mathbf{x}, t)}{k_4}$$

$$\mathbf{E}_5(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_5 \exp(i\mathbf{k}_5 \cdot \mathbf{x} - i\omega t)$$

$$\mathbf{B}_5(\mathbf{x}, t) = n \frac{\mathbf{k}_5 \times \mathbf{E}_5(\mathbf{x}, t)}{k_5}$$

Dabei ist $k_1 = k_2 = k_5 = k = n \frac{\omega}{c}$ und $k_3 = k_4 = k' = \frac{\omega}{c}$.

Aus den Randbedingungen bei $z = 0$ und $z = d$ folgt:

$$k_{1x} = k_{2x} = k_{3x} = k_{4x} = k_{5x}$$

$$k_{1z} = -k_{2z} = k_{5z} = k_z$$

$$k_{3z} = -k_{4z} = k'_z$$

Wie in der Skizze veranschaulicht gilt $\mathbf{E} = E\mathbf{e}_y$, also ist das \mathbf{E} -Feld tangential zur Grenzfläche. Die Stetigkeit der tangentialen Komponente von \mathbf{E} impliziert:

$$E_1 + E_2 = E_3 + E_4 \quad (79)$$

$$E_3 e^{i\delta} + E_4 e^{-i\delta} = E_5 \quad (80)$$

wobei $\delta = k'_z d$ die Phasendifferenz des E-Feldes zwischen den beiden Grenzflächen für die Welle 3 ist. Die Stetigkeit der tangentialen Komponente H_y von $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$ liefert weiterhin

$$n(E_1 - E_2)k_z/k = (E_3 - E_4)k'_z/k'$$

$$(E_3 e^{i\delta} - E_4 e^{-i\delta})k'_z/k' = nE_5 k_z/k$$

Mit $k_z/k = \cos \alpha$ und $k'_z/k' = \cos \beta$ folgt:

$$n(E_1 - E_2) \cos \alpha = (E_3 - E_4) \cos \beta \quad (81)$$

$$(E_3 e^{i\delta} - E_4 e^{-i\delta}) \cos \beta = n E_5 \cos \alpha \quad (82)$$

Daraus bestimmen wir zunächst E_3 und E_4 . $\cos \beta(80) + (82)$ bzw. $\cos \beta(80) - (82)$ liefert:

$$E_3 = E_5 e^{-i\delta} \frac{1 + \frac{n \cos \alpha}{\cos \beta}}{2} = E_5 e^{-i\delta} \frac{1 + \xi}{2}$$

$$E_4 = E_5 e^{i\delta} \frac{1 - \frac{n \cos \alpha}{\cos \beta}}{2} = E_5 e^{i\delta} \frac{1 - \xi}{2}$$

mit $\xi = \frac{n \cos \alpha}{\cos \beta}$. Aus $n \cos \alpha(79) + (81)$ folgt:

$$E_1 = \frac{1 + \frac{\cos \beta}{n \cos \alpha}}{2} E_3 + \frac{1 - \frac{\cos \beta}{n \cos \alpha}}{2} E_4 = \frac{1 + \xi^{-1}}{2} E_3 + \frac{1 - \xi^{-1}}{2} E_4$$

$$= E_5 \left(e^{-i\delta} \frac{1 + \xi^{-1}}{2} \frac{1 + \xi}{2} + e^{i\delta} \frac{1 - \xi^{-1}}{2} \frac{1 - \xi}{2} \right) = E_5 \left(\cos \delta - i \frac{\xi + \xi^{-1}}{2} \sin \delta \right)$$

Daraus folgt für das Verhältnis zwischen eingestrahelter und transmittierter Leistung:

$$T_{\perp} = \frac{|E_5|^2}{|E_1|^2} = \frac{1}{\cos^2 \delta + \left(\frac{\xi + \xi^{-1}}{2} \right)^2 \sin^2 \delta}$$

Mit variablem Abstand oszilliert die Transmission also zwischen $\left(\frac{2}{\xi + \xi^{-1}} \right)^2$ und 1.

(b) Totalreflexion tritt auf, wenn

$$n \sin \alpha = \sin \beta > 1$$

Wie im Skript diskutiert, schafft die Definition eines komplexen Anteils des Winkels $\beta = \frac{\pi}{2} - i\theta$ Abhilfe:

$$\sin \beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - i\theta \right) = \cosh \theta$$

$$\cos \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - i\theta \right) = i \sinh \theta$$

Damit folgt für ξ und die Phase δ :

$$\xi = \frac{n \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{n \cos \alpha}{i \sinh \theta}$$

$$\delta = k'_z d = k' \cos \beta d = i k' d \sinh \theta$$

$$\cos \delta = \cosh \kappa \quad \text{mit } \kappa = \frac{\delta}{i} = k' d \sinh \theta$$

$$\sin \delta = i \sinh \kappa$$

Die gesamte Rechnung von Teil (a) kann mit diesen Ersetzungen übernommen werden. Es folgt:

$$E_1 = E_5 \left(\cos \delta - i \frac{\xi + \xi^{-1}}{2} \sin \delta \right) = E_5 \left(\cosh \kappa + \frac{\xi + \xi^{-1}}{2} \sinh \kappa \right)$$

und weiterhin:

$$T_{\perp} = \frac{|E_5|^2}{|E_1|^2} = \frac{1}{\cosh^2 \kappa + \left| \frac{\xi + \xi^{-1}}{2} \right|^2 \sinh^2 \kappa}$$

Im Grenzfall $d/\lambda = \frac{dk'}{2\pi} \rightarrow 0$ geht $T \rightarrow 1$ und für $d \gg \lambda$ geht

$$T \propto \exp(-2\kappa) = \exp \left(-4\pi \frac{d}{\lambda} \sinh \theta \right)$$