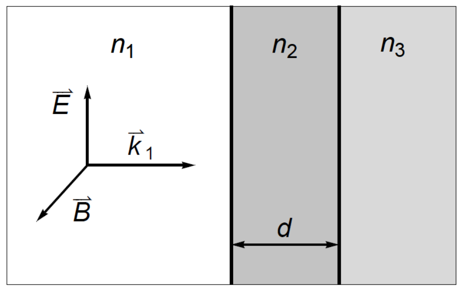
1 Brechung elektromagnetischer Wellen

Eine ebene Welle der Frequenz ω falle senkrecht auf die in der nebenstehenden Abbildung gezeigte Zwischenschicht. Die Brechungsindices der drei nichtmagnetischen Medien (mit Grenzflächen ohne freie Ladungen bzw. Ströme) seien n_1, n_2 und n_3. Die Dicke der Zwischenschicht sei d, während die anderen beiden Medien jeweils einen Halbraum ausfüllen.

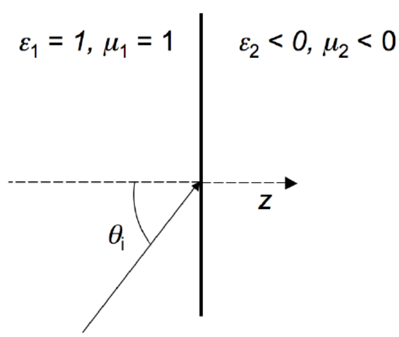


(a) Man berechne die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (d.h. den durchgelassenen bzw. reflektierten Energiestrom, bezogen auf den einfallenden).

(b) Das Medium mit dem Brechungsindex n_1 sei Teil eines optischen Systems (etwa einer Linse), während das Medium mit Brechungsindex n_3 aus Luft bestehe ($n_3 = 1$). Die Oberfläche des ersten Mediums soll mit einer optischen Schicht (dem Medium n_2) versehen werden, so dass bei einer bestimmten Frequenz ω_0 keine reflektierte Welle auftritt. Welche Dicke d und welchen Brechungsindex n_2 muss diese Schicht haben?

2 Metamaterial (WS. 09/10)

Wir betrachten eine ebene elektromagnetische Welle in einem Material mit reellen, negativen ϵ_2 und μ_2.



(a) Zeigen Sie ausgehend von den Maxwellgleichungen, dass der Wellenvektor $\mathbf{k}$ antiparallel zum Poynting-Vektor $\mathbf{S}$ der Welle steht.

(b) Der Brechungsindex n_2 wird damit gemäß

$$\mathbf{k} = n_2 \frac{\omega}{c} \hat{e}_S, \text{ mit } \hat{e}_S = \frac{\mathbf{S}}{|\mathbf{S}|} \tag{1}$$

negativ, d.h. $n_2 = -\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}$.

Betrachten Sie nun eine elektromagnetische Welle, die aus dem Vakuum auf eine planare Grenzfläche zu diesem Metamaterial trifft. Bestimmen Sie mit dem Gesetz von Snellius den Winkel, den die transmittierte Welle zur Grenzfläche bildet.

(c) Die einfallende Welle sei senkrecht zur Einfallsebene polarisiert. Zeigen Sie ausgehend von den Stetigkeitsbedingung, die an der Grenzfläche gelten, dass für das Verhältnis der Amplituden des elektrischen Feldes der einfallenden und transmittierten Welle gilt:

$$\frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2\cos\theta_i}{\cos\theta_i - \frac{1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - \sin^2\theta_i}} \tag{2}$$

3 Brewster-Winkel (WS 00/01)

Eine elektromagnetische Welle mit Frequenz ω trifft aus dem Vakuum auf ein Medium (ϵ_M, μ_M) unter einem Einstahlwinkel α_i relativ zur Flächennormalen. Ein Teil der Welle wird ins Vakuum zurück reflektiert, der Rest dringt ins (ladungsfreie) Medium ein.

(a) Welche Kontinuitätsbedingungen gelten für die elektrische/magnetische Feldstärke der Welle bei Eintritt in das Medium?

(b) Leiten Sie das SnellÄsche Brechungsgesetz für den vorliegenden Fall aus a) her.

(c) Was passiert wenn α_i dem sog. Brewster-Winkel entspricht?

4 Komplexer Brechungsindex

Eine im Vakuum propagierende elektromagnetische Welle ($\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\,\hat{e}_x$) trifft senkrecht auf ein Medium mit komplexem Brechungsindex n = $\Re[n] + i\Im[n] = n_1 + in_2$ (Grenzfläche ohne freie Ladungen bzw. Ströme).

(a) Berechnen Sie die Amplituden der reflektierten und der transmittierten Welle im Fall ($\mu = 1$).

(b) Finden Sie nach einer Mittelung über den Zeitraum T » $\frac{1}{\omega}$ die Energiestromdichte der transmittierten Welle im Falle $n_1 = \Re[n] << \Im[n] = n_2$ und $|n| >> 1$.
Hinweis: Wählen Sie die Polarisationen der E-Felder entlang der y-Achse.

5 Wellen im leitenden Medium

In einem Medium mit Leitfähigkeit σ, Dielektrizitätskonstante ϵ und magnetischer Permeabilität μ gelte das Ohmsche Gesetz:

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \tag{3}$$

Die makroskopischen Maxwell Gleichungen lauten

$$\begin{array}{cc} div\mu\mathbf{H} = 0 & \mathbf{rot}\mathbf{E} + \frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = 0 \\ div\epsilon\mathbf{E} = 0 & \mathbf{rot}\mathbf{H} - \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{array}$$

Wir betrachten ebene Wellen die in der x-Richtung propagieren und bilden die Zerlegung

$$\mathbf{E} = E_x\hat{e}_x + \mathbf{E}_\perp,\ \mathbf{H} = H_x\hat{e}_x + \mathbf{H}_\perp. \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie nun, dass gilt

$$\begin{array}{cc} \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 & \frac{\partial H_x}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}\right)E_x = 0 \end{array}$$

und geben Sie die Lösungen dieser Gleichungen $E_x(x,t)$, $H_x(x,t)$ an.

(b) Wählen Sie nun für die Vertikalkomponenten die Ansätze

$$\mathbf{H}_\perp = \mathbf{H}_0 e^{i(kx-\omega t)} \tag{5}$$

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}_0 e^{i(kx-\omega t)} \tag{6}$$

und zeigen sie, dass k i.A. komplexwertig ist:

$$k^2 = \mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + i\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right) \tag{7}$$

(c) Bestimmen Sie $\Re[k]$ und $\Im[k]$ und diskutieren Sie

i) den Fall eines schlechten Leiters $4\pi\sigma/(\omega\epsilon)$ « 1
ii) und den eines Metalls $4\pi\sigma/(\omega\epsilon)$ » 1

(d) Zeigen Sie mit den Ergebnissen aus Teil (b), dass gilt

$$\mathbf{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}\left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{1/4} e^{i\phi}(\hat{e}_x \times \mathbf{E}_0), \tag{8}$$

wobei ϕ die Phase von $k = |k|e^{i\phi}$ ist. Bestimmen Sie ϕ und das Verhältnis von $|\mathbf{H}_0|/|\mathbf{E}_0|$.
(e) Berechnen Sie für den Fall eines Metalls die Eindringtiefe der Welle, d.h. die Längenskala, auf der die Amplitude der Welle bis auf 1/e der ursprünglichen Amplitude abgenommen hat.

6 Tunneleffekt

Zwei unendlich ausgedehnte, isotrope, nichtabsorbierende Medien mit gleichen elektronischen Eigenschaften und Brechungsindex $n = \sqrt{\epsilon}$ ($\mu = 1$) erfüllen den Raum und sind nur durch einen Luftspalt ($n_L = 1$) der konstanten Dicke d voneinander getrennt. Eine ebene Welle der Frequenz ω kommt aus einem der Medien und trifft auf die erste Medium-Luft Trennfläche mit dem Einfallswinkel α. Es liege ferner eine lineare Polarisation der Welle senkrecht zur Einfallsebene vor.

(a) Berechnen Sie das Verhältnis der in das zweite Medium durchgelassenen Strahlungsleistung relativ zur einfallenden Leistung.

(b) Der Einfallswinkel α sei nun größer als der Grenzwinkel für totale Reflexion. Berechnen Sie diesen Grenzwinkel und das Verhältnis von durchgelassener und einfallender Strahlungsleistung als eine Funktion von d/λ, weobei λ die Wellenlänge der einfallenden Welle sei.