Spezielle Relativitätstheorie und Elektrodynamik

Aufgabe 1

Im Bezugsystem K treten zwei nahezu gleich gute Läufer im Abstand d voneinander an die auf der x-Achse liegende Startlinie und warten auf das Signal zu einem Lauf parallel zur y-Achse. Die beiden Starter, die jeweils neben den Läufern stehen, feuern ihre Startpistole mit einem kleinen Zeitunterschied ab, so dass der bessere der beiden Läufer benachteilegt wird. Im System K beträgt der Zeitunterschied T.

a) Für welchen Bereich von Zeitunterschieden gibt es ein Bezugssystem K', in dem es zu keiner Benachteiligung kommt, und für welche Skala von Zeitunterschieden gibt es ein System K', in dem eine tatsächliche Benachteiligung (und nicht nur eine scheinbare) Benachteiligung auftritt?

b) Wie lauten die zu diesen beiden Möglichkeiten gehörenden Lorentz-Transformation von K nach K'?

---

a) Das erste Ereignis ist der Start des ersten Läufers bei $x^\mu = 0$. Der zweite Läufer startet dann bei

$$(y^\mu) = \begin{pmatrix} cT \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Abstand der Ereignisse ist $\Delta = d^2 - c^2T^2$. Es gibt also ein Bezugssystem, in dem die beiden Läufer gleichzeitig starten, falls der Abstand raumartig ist, d.h. $d > cT$. Eine tatsächliche Benachteiligung gibt es, falls der Abstand zeitartig ist, d.h. $d < cT$.

b) Für die Transformation in das bewegte Bezugssystem K' ist nur eine relative Bewegung in x-Richtung nötig:

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu = 0 \\ y'^0 &= \gamma(y^0 - \beta y^1) \\ y'^1 &= \gamma(y^1 - \beta y^0) \end{aligned}$$

Keine Benachteilugung gibt es, wenn $y'^0 = 0$ ist, also $\beta = \frac{y^0}{y^1} = \frac{cT}{d} < 1$ [wegen a)]. Eine tatsächliche Benachteiligung tritt dagegen auf, falls $y'^1 = 0$, also $\beta = \frac{y^1}{y^0} = \frac{d}{cT} < 1$ [wegen a)].

Aufgabe 2

Ein Drahtring D mit Radius R bewege sich gleichförmug mit konstanter Geschwindigkeit im Feld eines im Koordinatenursprung ruhenden magnetischen Dipols mit Dipolmoment $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{e}}_z$. Die Lage des Rings in Abhängigkeit der Zeit t sei - unter Vernachlässigung der Dicke - gegeben durch $x^2 + y^2 = R^2$ und $z = vt$.

a) Welche Ringspannung $U = \int_D \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ wird in der Schleife induziert, wenn man das Feld des Rings vernachlässigt.

b) Skizzieren sie den Verlauf der Ringspannung als Funktion von t. Für welche Werte von t wird die Ringspannung extremal?

---

a)

$$U = \int_D \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_A \mathrm{rot}\,\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_A \frac{1}{c} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$$

Die induzierte Spannung hängt wegen dem Stokeschen Satz und $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ von dem Integral des Magnetfeldes über die Fläche A ab, die vom Ring eingeschlossen wird. Das Magnetfeld eines Dipols ist mit $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{e}}_z$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi c}\left[3\frac{mz\mathbf{x}}{\sqrt{\rho^2+z^2}^5} - \frac{m\hat{\mathbf{e}}_z}{\sqrt{\rho^2+z^2}^3}\right] \qquad \text{mit} \quad z = vt$$

Dabei wurden die Zylinderkoordinaten $\rho^2 = x^2 + y^2$ verwendet. Die Integration über den Kreisring ist mit $\mathrm{d}\mathbf{f} = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\phi \hat{\mathbf{e}}_z$:

$$\int_A \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \mathrm{d}\rho \, \frac{m}{4\pi c}\left[3\frac{\rho z^2}{\sqrt{\rho^2+z^2}^5} - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}^3}\right] = \frac{m}{2c}\frac{R^2}{\sqrt{R^2+z^2}^3}$$

Die Spannung ist demnach:

$$U = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\int_A \frac{1}{c}\mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} \,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{3m}{2c^2}\frac{R^2 v^2 t}{\sqrt{R^2+v^2t^2}^5}$$

b) Die Extrema liegen bei

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{R^2v^2t}{\sqrt{R^2+v^2t^2}^5} = \frac{R^2 - 4v^2t^2}{\sqrt{R^2+v^2t^2}^7} v \qquad \Rightarrow \qquad t_0 = \pm\frac{R}{2v}$$

Aufgabe 3

Ein Teilchen mit Masse M und Ladung $q > 0$ bewegt sich in einem elektrischen und magnetischen Feld. Diese sind räumlich und zeitlich konstant:

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_x \qquad E, B > 0$$

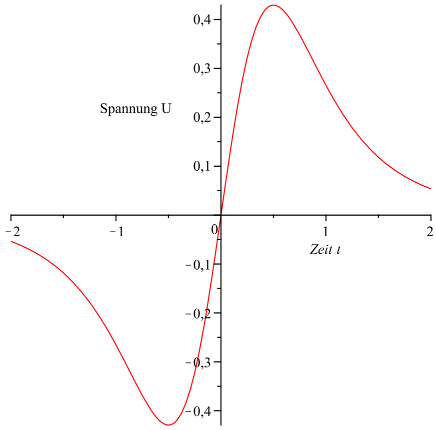

Abbildung 1: Spannung U als Funktion der Zeit ($m = R = v = c = 1$)

a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ des nichtrelativistischen Teilchens mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}(0) = 0$.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_1$ des Teilchens, bei der es keine Beschleunigung erfährt.

c) Betrachten Sie nun ein Bezugssystem in dem das Magnetfeld verschwindet. Dort hat das Teilchen die entsprechend transformierte Geschwindigkeit $\mathbf{v'}_1$, es erfährt aber eine Beschleunigung durch das elektrische Feld. Wie ist das mit einer gleichförmig Bewegung im System aus b) vereinbar?

---

a) Mit der Lorentz-Kraft gilt:

$$M \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{z}B \\ -\dot{y}B \end{pmatrix} \right] \tag{1}$$

Da $\dot{x}(0) = x(0) = 0$ ist daher $x(t) = 0$. Mit der Abkürzung $\omega = \frac{qB}{Mc}$ lauten die Differentialgleichungen für die restlichen Komponenten:

$$\begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} \dot{z} \\ -\dot{y} + \frac{E}{B}c \end{pmatrix}$$

Integriert man z.B. die erste Gleichung erhält man:

$$\dot{y}(t) - y(0) = \omega \left[z(t) - z(0) \right] \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y}(t) = \omega z(t)$$

Dies kann man in die zweite Gleichung einsetzen:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = \omega \frac{E}{B} c$$

Eine partikuläre Lösung ist offensichtlich $z(t) = \frac{Ec}{B\omega}$. Die Gesamtlösung einer solchen linearen Differentialgleichung ist ja:

$$z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) + \frac{Ec}{B\omega}$$

Die Konstanten bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} z(0) &= A + \frac{Ec}{B\omega} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{Ec}{B\omega} \\ \dot{z}(0) &= -B\omega = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B = 0 \end{aligned}$$

Zusammangefasst gilt also:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{Ec}{B\omega}\left[1 - \cos(\omega t)\right] \\ y(t) &= \omega \int_0^t z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{Ec}{B\omega}\left[\omega t + \sin(\omega t)\right] \\ x(t) &= 0 \end{aligned}$$

Das Teilchen bewegt sich auf einer Schraubenlinie.

b) Soll das Teilchen keine Beschleunigung erfahren, muss nach (1) $\dot{z} = 0$ und

$$\dot{y} = \frac{Ec}{B} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{v}_1 = \frac{Ec}{B}\hat{\mathbf{e}}_y$$

c) Da die Teilchengeschwindigkeit kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sein muss und sich das Teilchen gleichförmig bewegen soll, muss

$$|\mathbf{v}_1| = \frac{Ec}{B} < c \qquad \text{bzw.} \qquad E^2 - B^2 < 0$$

Aber weil $E^2 - B^2$ Lorentz-invariant ist, gibt es in dem Fall kein Bezugssystem in dem das Magnetfeld verschwindet.

Wenn es ein Bezugsystem ohne Magnetfeld gibt, müsste $|\mathbf{v}_1| = \frac{Ec}{B} > c$ sein für eine gleichförmige Bewegung. In dem Fall kann sich das Teilchen, egal wie schnell, gar nicht geradlinig bewegen.

Aufgabe 4

Eine im Vakuum in x-Richtung laufende, zirkular polarisierte Welle wird durch das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathrm{Re}\left[f(x - ct)(\hat{\mathbf{e}}_y + \mathrm{i}\hat{\mathbf{e}}_z)\right]$$

beschrieben, worin f eine beliebige, komplexwertige Funktion darstellt. Ermitteln Sie aus den Maxwell-Gleichungen das zugehörige Magnetfeld und berechnen Sie die Energiedichte, den Poyntingvektor, die Impulsdichte sowie den Spannungstensor der Welle.

Da f eine komplexwertige Funktion ist zerlegt man sie in Real- und Imaginärteil $f = a + \mathrm{i}b$. Das elektrische Feld und dessen Rotation ist somit:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ a(x-ct) \\ -b(x-ct) \end{pmatrix} \qquad\qquad -c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -c\begin{pmatrix} 0 \\ b'(x-ct) \\ a'(x-ct) \end{pmatrix}$$

Aufgrund der Maxwell-Gleichung $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ist dann, sofern man die Integrationskonstanten Null setzt, das Magnetfeld:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ b(x-ct) \\ a(x-ct) \end{pmatrix} = \mathrm{Re}\left[f(x-ct)(\hat{\mathbf{e}}_z - \mathrm{i}\hat{\mathbf{e}}_y)\right]$$

Die Energiedichte im Vakuum ist

$$u = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) = \frac{1}{2}\left(|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2\right) = a^2 + b^2 = |f|^2$$

Der Poyntingvektor ist $\mathbf{S} = c\,\mathbf{E}\times\mathbf{H} = c\,\mathbf{E}\times\mathbf{B} = c\left(a^2+b^2\right)\hat{\mathbf{e}}_x = c\,u\,\hat{\mathbf{e}}_x$ und damit die Impulsdichte $\mathbf{P} = \frac{1}{c}\,\mathbf{D}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S} = \frac{1}{c}\,u\,\hat{\mathbf{e}}_x$. Der Spannungstensor der Welle ist definiert durch:

$$T_{ij} = E_iD_j + H_iB_j - \delta_{ij}u = E_iE_j + B_iB_j - \delta_{ij}u$$

Der Tensor ist symmetrisch $T_{ij} = T_{ji}$ und es zeigt sich:

$$T_{11} = -u = -|f|^2 \qquad\qquad \text{sonst} \qquad T_{ij} = 0$$

Aufgabe 5

Ein Stab, der in Ruhe die Länge L besitzt, fliegt an Ihnen mit der Geschwindigkeit v in Richtung seiner Ausdehnung vorbei.

a) Wie lange dauert es, bis er an Ihnen vorbei ist?

b) Wie lange dauert dieser Vorgang im Ruhesystem des Stabes?

c) Vergleichen Sie die beiden Zeiten.

d) Ist das Ergebnis mit der Zeitdilitation verträglich und, wenn ja, wieso?

e) Ein Stab der Länge L ruht im System S in einem Winkel α zur x-Richtung. Berechnen Sie die Lorentz-Kontraktion des Stabes in einem in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegten Bezugssystem.

---

a) In unserem Bezugssystem hat der Stab aufgrund der Längenkontraktion die Länge $L' = \frac{L}{\gamma}$. Daher braucht er die Zeit $\Delta t' = \frac{L}{\gamma v}$ für den Vorbeiflug.

b) Im System des Stabes dauert es $\Delta t = \frac{L}{v}$

c) Es ist also

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \gamma^{-1} < 1$$

d) Dieses Verhältnis ist verträglich mit der Zeitdilitation, da es sich bei $\Delta t'$ um unsere Eigenzeit für den Vorbeiflug handelt und die stellt die kürzeste Zeit dar. Die Eigenzeit basiert immer auf einer Zeitmessung an einem *einzigen* Ort. Im Ruhesystem des Stabes muss man beim Vorbeiflug Zeiten an zwei Orten messen.

e) In seinem Ruhesystem sind die kartesischen Ausmaße des Stabes durch $L_x = L\cos\alpha$ und $L_y = L\sin\alpha$ gegeben. Ein Beobachter des mit $v\hat{\mathbf{e}}_x$ vorbeifliegenden Stabes sieht diesen in x-Richtung Lorentz-kontrahiert, also $L'_x = L_x/\gamma$ und $L'_y = L_y$. Die Länge, welche der Beobachter wahrnimmt, ist demnach

$$L' = \sqrt{{L'_x}^2 + {L'_y}^2} = \frac{L}{\gamma}\sqrt{1 + (\gamma^2 - 1)\sin^2\alpha} \leq L$$

Aufgabe 6

Die Stromdichte j^μ verhält sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Vierer-Vektor. Wie sieht das aber mit der Ladungsdichte ρ aus? Welche Konsequenzen hat dieses Verhalten für die Gesamtladung $Q = \int \mathrm{d}^3x\,\rho$?

Betrachtet man das Ruhesystem der Ladungsverteilung, so ist dort ρ. In einem dazu bewegten System ist gemäß der Lorentz-Transformation von j^μ die Dichte $\rho' = \gamma\rho$. Die Ladung ist im ersten System $Q = \int_V \mathrm{d}^3x\,\rho$, im zweiten dagegen $Q' = \int_{V'} \mathrm{d}^3x'\gamma\,\rho$. Da aufgrund der Längenkontraktion aber $\mathrm{d}x' = \gamma^{-1}\mathrm{d}x$ und $\mathrm{d}^3x' = \gamma^{-1}\mathrm{d}^3x$ ist, sind diese beiden Ladungen gleich $Q = Q'$, solange man über entsprechende Volumina integriert. Wegen der Längenkontraktion ist der Zusammenhang der Volumina ja $V' = \gamma^{-1}V$. Die Transformation von Dichten aus dem Ruhesystem in ein anderes ergibt sich also schon wegen $\rho \propto V^{-1}$

Aufgabe 7

Ein unendlich langer, gerader Draht von vernachlässigbar geringem Querschnitt befinde sich im Inertialsystem K' in Ruhe und trage eine homogene Linienladungsduchte λ. Das System K' und der Draht bewege sich gegenüber dem Laborsystem K mit der Gesichwindigkeit $\mathbf{v}$ parallel zur Achse des Drahtes.

a) Man gebe die durch Zylinderkoordinaten ausgedrückten elektrischen und magnetischen Felder im Ruhesystem des Drahtes an. Unter Verwendung der Lorentz-Transformationeigenschaften der Felder bestimme man die Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder im Laborsystem.

b) Wie lauten die Ladungs- und Stromdichten des Drahtes in seinem Ruhesystem und im Laborsystem? Aus den Ladungs- und Stromdichten im Laborsystem berechne man direkt die entsprechenden elektrischen und magnetischen Felder und vergleiche das Ergebnis mit a).

---

a) Im Ruhesystem K' liege der Draht auf der z-Achse. Wählt man einen Zylinder mit Radius ρ' und Länge l' um den Draht, so gilt nach dem Satz von Gauß:

$$\int_{\partial Z} \mathbf{E}' \cdot \mathrm{d}f = \int_Z \mathrm{d}^3x' \lambda \frac{\delta(\rho')}{2\pi\rho'}$$

Der Faktor $\frac{1}{2\pi\rho'}$ in der Dichte ist für die Normierung

$$\int \mathrm{d}^2x' \frac{\delta(\rho')}{2\pi\rho'} = \int_0^\infty \rho \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \frac{\delta(\rho')}{2\pi\rho'} = 1$$

notwendig. Da das E-Feld zylindersymmetrisch sein wird, gilt mit dem Satz von Gauß und einer zylinderförmigen Fläche der Länge l um den Draht:

$$E' 2\pi\rho' l = \lambda l$$

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda}{2\pi\rho'} \hat{\mathbf{e}}'_\rho$$

Ohne Strom liegt natürlich kein Magnetfeld $\mathbf{B}' = 0$ vor. Die Transformation ins System K erfolgt mit $-v\hat{\mathbf{e}}_z$. Daher ist $x = x'$, $y = y'$, $\rho = \rho'$ und auch $\hat{\mathbf{e}}'_\rho = \hat{\mathbf{e}}_\rho$, $\hat{\mathbf{e}}'_\phi = \hat{\mathbf{e}}_\phi$. Die Transformation der Felder ist damit:

$$\mathbf{E} = \gamma \mathbf{E}' = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho$$

$$\mathbf{B} = \gamma \frac{v}{c} \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{E}' = \frac{\gamma v \lambda}{2\pi\rho c} \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

b) Die Stromdichte im System K' lautet:

$$(j'^\mu) = \begin{pmatrix} c\lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\delta(\rho')}{2\pi\rho'}$$

Im System K ist die Stromdichte dann:

$$(j'^{\mu}) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\lambda \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} = \begin{pmatrix} \gamma c\lambda \\ 0 \\ 0 \\ \beta\gamma c\lambda \end{pmatrix} \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho}$$

Wie in a) ergibt sich das E-Feld wieder aus dem Gaußschen Satz zu:

$$\mathbf{E} = \frac{\gamma\lambda}{2\pi\rho}\hat{\mathbf{e}}_{\rho}$$

Für das B-Feld verwendet man den Satz von Stokes und ein Integral über einen Kreis mit Radius ρ:

$$\int_{\partial K} \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \frac{1}{c}\int_{K} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$$
$$B\,2\pi\rho = \beta\gamma\lambda$$

Das Magnetfeld stimmt also auch mit dem aus a) überein:

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma\lambda v}{2\pi\rho c}\hat{\mathbf{e}}_{\phi}$$

Aufgabe 8

Eine alternative Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \frac{1}{c}j_{\mu}A^{\mu}$$

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für A^{μ} her. Unter welchen Voraussetzung stimmt sie mit den Maxwell-Gleichungen $\partial_{\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{c}j^{\mu}$ überein?

b) Überlegen Sie, wie diese Lagrange-Dichte aus der Dichte $\mathscr{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{c}j_{\mu}A^{\mu}$ hervorgeht.

---

a) Verwendet man wieder das Variationsverfahren gilt:

$$\begin{aligned} A^{\mu} &\longrightarrow A^{\mu} + \delta A^{\mu} \\ \partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} &\longrightarrow \partial_{\mu}A_{\nu}\partial^{\mu}A^{\nu} + 2\partial^{\mu}A^{\nu}\partial_{\mu}\delta A_{\nu} \\ \mathscr{L} &\longrightarrow \mathscr{L} - \partial^{\mu}A^{\nu}\partial_{\mu}\delta A_{\nu} + \frac{1}{c}j^{\nu}\delta A_{\nu} \end{aligned}$$

Die Wirkung $S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathscr{L}$ ändert sich damit um:

$$\int \mathrm{d}^4x \left(-\partial^{\mu}A^{\nu}\partial_{\mu}\delta A_{\nu} + \frac{1}{c}j^{\nu}\delta A_{\nu}\right) = \int \mathrm{d}^4x \left(\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} + \frac{1}{c}j^{\nu}\right)\delta A_{\nu}$$

Diese Änderung soll wieder Null sein. Daher ergibt sich die Wellengleichung:

$$\Box A^\nu = -\frac{1}{c} j^\nu$$

Dagegen liefert die „normale“ Maxwell-Gleichung

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\nu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = \partial^\mu \partial_\nu A^\nu - \Box A^\mu = \frac{1}{c} j^\mu$$

Dies stimmt nur im Fall der Lorentz-Eichung $\partial_\mu A^\mu = 0$ überein.

b)

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = 2\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - 2\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu$$

Der zweite Term läßt sich auch anders ausdrüken:

$$-\partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu = -\partial_\mu \left(A_\nu \partial^\nu A^\mu\right) + A_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu$$

In der Lorentz-Eichung bleibt nur die totale Ableitung $\partial_\mu \left(A_\nu \partial^\nu A^\mu\right)$ übrig. In der Wirkung verschwindet dieser Anteil allerdings, da A^μ im Unendlichen verschwindet. Die angegebene Wirkung gilt also nur in der Lorentz-Eichung.

Aufgabe 9

Gegeben sei ein statisches, homogenes elektrisches Feld E_0 parallel zur x-Achse sowie ein statisches, homogenes Magnetfeld $B_0 = 2E_0$, das in der x-y-Ebene liegt, und mit der x-Achse den Winkel θ bildet. Bestimmen Sie die Relativgeschwindigkeit eines Bezugssystems, in dem die elektrischen und magnetischen Felder zueinander parallel sind. Wie lauten die Felder in diesem System für $\theta \ll 1$ und $\theta \to \frac{\pi}{2}$?
Hinweis: Untersuchen Sie den Fall $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{e}}_z$.

Die Felder lauten:

$$\mathbf{E} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{B} = 2E_0 \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

In einem System, das sich mit $\beta \hat{\mathbf{e}}_z$ bewegt sind die Felder

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \beta \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z} \times \mathbf{B}) = \gamma E_0 \begin{pmatrix} 1 - 2\beta\sin\theta \\ 2\beta\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}' = \gamma(\mathbf{B} - \beta \hat{\mathbf{e}}_\mathbf{z} \times \mathbf{E}) = \gamma E_0 \begin{pmatrix} 2\cos\theta \\ 2\sin\theta - \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

In dem System sollen diese Felder parallel sein, also

$$0 = \mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = \gamma^2 E_0^2 \left[2\beta^2 \sin\theta - 5\beta + 2\sin\theta\right] \hat{\mathbf{e}}_z$$

$$\beta_{1,2} = \frac{5}{4\sin\theta}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2\theta}\right]$$

Weil $\beta < 1$ sein muss, ist nur das Minuszeichen vor der Wurzel zulässig.

$$\beta = \frac{5}{4\sin\theta}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2\theta}\right]$$

Für $\theta \ll 1$ ist $\sin\theta \approx \theta$ und $\cos\theta \approx 1$ und damit

$$\beta \approx \frac{5}{4\theta}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{16}{25}\theta^2}\right] \approx \frac{5}{4\theta}\left[1 - \left(1 - \frac{16}{50}\theta^2\right)\right] = \frac{2}{5}\theta$$

Daher ist $\gamma \approx 1$ und die Felder lauten:

$$\mathbf{E}' = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5}\theta \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}' = 2E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{5}\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Grenzwert $\theta \to \frac{\pi}{2}$ setzt man $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ mit $\alpha \ll 1$. Damit ist $\cos\theta = \sin\alpha \approx \alpha$ und $\sin\theta = \cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$.

$$1 - 2\beta\sin\theta \approx -\frac{3}{2} + \sqrt{1 - \frac{16}{25}\left(1 - \alpha^2\right)} = \frac{4}{3}\alpha^2$$

In den restlichen Näherungen genügt es $\beta \approx \frac{1}{2}$ zu nehemen, also $2\beta\cos\theta \approx \alpha$ und $\gamma \approx \frac{2}{\sqrt{3}}$. Die Felder sind dann

$$\mathbf{E}' = \frac{2\alpha}{\sqrt{3}} E_0 \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B}' = \sqrt{3} E_0 \begin{pmatrix} \frac{4}{3}\alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10

Ein Ring in der x-y-Ebene mit Radius a hat die Linienladungsdichte $\lambda = \lambda_0 \left|\sin\frac{\phi}{2}\right|$. Er rotiert um seine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Berechnen Sie die retardierende Potentiale an seinem Mittelpunkt.
Hinweis:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$$

Der Mittelpunkt des Rings sei der Ursprung des Koordinatensystems.
Da sich der Ring dreht, ist die Ladung, die zur Zeit $t = 0$ bei φ ist, später am Ort $\varphi + \omega t$.
Die Ladungsdichte bei einem festen ϕ ist daher

$$\lambda(t, \phi) = \lambda_0 \left| \sin \frac{\phi - \omega t}{2} \right|$$

Die retardierte Zeit ist am Mittelpunkt $t_{\text{ret}} = t - \frac{1}{c} |0 - \mathbf{x}| = t - \frac{a}{c}$. Das elektrische Potential ist dann mit Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}
\Phi(0,t) &= \frac{1}{4\pi} \int \mathrm{d}^3x' \, \frac{\lambda(t_{\text{ret}}, \phi')\delta(z)\delta(\rho - a)}{|\mathbf{0} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \lambda_0 \left| \sin \frac{\phi' - \omega t_{\text{ret}}}{2} \right| \\
&= \frac{1}{4\pi} \lambda_0 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| = \frac{\lambda_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \sin \frac{\phi'}{2} = \frac{\lambda_0}{\pi}
\end{aligned}$$

Das Weglassen von ωt_{ret} ist möglich, weil man über eine volle Periode von $\left|\sin(\frac{\varphi}{2})\right|$ integriert und der genaue Anfangspunkt der Periode egal ist. Zusätzlich ist in dem Integrationsbereich von 0 bis 2π $\sin(\frac{\varphi}{2})$ positiv und die Betragsstriche sind überflüssig.
Die Stromdichte ist einfach die Ladungsdichte mit der Geschwindigkeit $a\omega\hat{\mathbf{e}}_\phi$ des Rings multipliziert:

$$\mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \lambda(t, \phi)\delta(\rho - a)\delta(z)\, a\omega\hat{\mathbf{e}}_\phi = a\omega\lambda_0 \left| \sin \frac{\phi - \omega t}{2} \right| \delta(\rho - a)\delta(z)\, \hat{\mathbf{e}}_\phi$$

Das Vektorpotential ist also:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(t,0) &= \frac{1}{4\pi c} \int \mathrm{d}^3x' \, \frac{\mathbf{j}(t_{\text{ret}}, \phi')}{|\mathbf{0} - \mathbf{x}'|} = \frac{a\omega\lambda_0}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \left| \sin \frac{\phi' - \omega t_{\text{ret}}}{2} \right| \begin{pmatrix} -\sin\phi' \\ \cos\phi' \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{a\omega\lambda_0}{4\pi c} \int_{0-\omega t_{\text{ret}}/2}^{2\pi - \omega t_{\text{ret}}/2} \mathrm{d}\phi' \left| \sin \frac{\phi'}{2} \right| \begin{pmatrix} -\sin\left(\phi' + \frac{\omega t_{\text{ret}}}{2}\right) \\ \cos\left(\phi' + \frac{\omega t_{\text{ret}}}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{a\omega\lambda_0}{4\pi c} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \sin \frac{\phi'}{2} \begin{pmatrix} -\sin\phi' \cos\left(\frac{\omega t_{\text{ret}}}{2}\right) - \cos\phi' \sin\left(\frac{\omega t_{\text{ret}}}{2}\right) \\ \cos\phi' \cos\left(\frac{\omega t_{\text{ret}}}{2}\right) - \sin\phi' \sin\left(\frac{\omega t_{\text{ret}}}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dabei wurde nach Variablensubstitution wieder die Periodizität aller Funktionen ausgenutzt und der Betrag wie vorhin weggelassen. Es bleiben zwei Integrale übrig:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin \frac{\phi}{2} \sin\phi = 2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin^2 \frac{\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2} = \frac{4}{3} \sin^2 \frac{\phi}{2} \bigg|_0^{2\pi} = 0 \\
&\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin \frac{\phi}{2} \cos\phi = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \sin \frac{\phi}{2} \left(2\cos^2 \frac{\phi}{2} - 1 \right) = \left(-\frac{4}{3} \cos^3 \frac{\phi}{2} + 2\cos \frac{\phi}{2} \right) \bigg|_0^{2\pi} = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Damit erhält man das Vektorpotential:

$$\mathbf{A}(t,0) = \frac{a\omega\lambda_0}{3\pi c}\begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\omega t_{\mathrm{ret}}}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\omega t_{\mathrm{ret}}}{2}\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11

Ein Teilchen bewegt sich im System K mit Geschwindigkeit $\mathbf{v_1}$. Das System K' bewegt sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit $v_2\hat{\mathbf{e}}_x$. Berechnen Sie durch Lorentz-Transformation, welche Geschwindigkeit es im K' hat und zeigen Sie damit die relativistische Geschwindigkeitsaddition.

Die Vierer-Geschwindigkeit im System K beträgt:

$$(u_1^\mu) = \gamma_1 \begin{pmatrix} c \\ v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix}$$

Dabei berechnen sich die γ-Faktoren wie üblich $\gamma_1 = \left(1 - \frac{\mathbf{v}_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ usw. Im System K' ist sie dann:

$$(u_1'^\mu) = \gamma \begin{pmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_2 & -\gamma_2\beta_2 & 0 & 0 \\ -\gamma_2\beta_2 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \gamma_1 \begin{pmatrix} c \\ v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{pmatrix} = \gamma_1\gamma_2 \begin{pmatrix} c(1 - \frac{v_1^1 v_2}{c^2}) \\ v_1^1 - v_2 \\ \frac{1}{\gamma_2} v_1^2 \\ \frac{3}{\gamma_2} v_1^3 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Komponente folgt:

$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{\gamma}{1 - \frac{v_1^1 v_2}{c^2}}$$

Setzt man dies in die anderen Gleichung ein, ergibt sich sofort die relativistische Geschwindigkeitsaddition:

$$\begin{aligned} v^1 &= \frac{v_1^1 - v_2}{1 - \frac{v_1^1 v_2}{c^2}} \\ v^2 &= \frac{1}{\gamma_2}\frac{v_1^2}{1 - \frac{v_1^1 v_2}{c^2}} \\ v^3 &= \frac{1}{\gamma_2}\frac{v_1^3}{1 - \frac{v_1^1 v_2}{c^2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 12

Eine ebene elektromagnetische Welle $\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$ propagiert im Vakuum im Bezugssystem K in z-Richtung und ist rechtszirkular polerisiert:

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \\ \mathbf{k} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \qquad\qquad \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ \mathrm{i}E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E_0 \text{ reell}$$

a) Drücken Sie die folgenden Beziehungen so durch Vierer-Vektoren aus, dass ihre Lorentz-Invarianz deutlich sichtbar ist:
   Lorentz-Eichung der Potentiale, Dispersionsrelation, Kontinuitätsgleichuung, Wellengleichung, Phaseninvarianz einer ebenen Welle

b) Geben Sie den Vorfaktor $\mathbf{B}_0$ für das zugehörige Magnetfeld, $\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$ an.

Das Bezugssystem K' , dessen Ursprung bei $t = 0$ mit dem bei von K übereinstimmt, bewegt sich (ohne Rotation) mit Geschwindigkeit v in x-Richtung in K. In K' sind die Felder der obigen Welle $\mathbf{E}'(t',\mathbf{x}') = \mathbf{E}'_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_\mu x'^\mu}$ und $\mathbf{B}'(t',\mathbf{x}') = \mathbf{B}'_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_\mu x'^\mu}$.

c) Berechnen Sie die Frequenz ω', den Wellenvektor $\mathbf{k}'$ und die Vorfaktoren $\mathbf{E}'_0$ und $\mathbf{B}'_0$ in K'.

d) Zeigen Sie, dass der Realteil von $\mathbf{E}'_0$ im Ortsteil von K' eine Richtung $\hat{\mathbf{e}}'$ definiert, die orthogonal zu $\mathbf{k}'$ ist.

e) Zeigen Sie, dass die Welle auch im System K' rechtszirkular polarisiert ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Komponente von $\mathbf{E}'_0$ in der Richtung von $\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{e}}'$ gerade i mal die Komponente in Richtung $\hat{\mathbf{e}}'$ ist.

---

a)
- Lorentz-Eichung der Potentiale: $\partial_\mu A^\mu = 0$
- Dispersionsrelation: $k_\mu k^\mu = 0$
- Kontinuitätsgleichuung: $\partial_\mu j^\mu = 0$
- Wellengleichung für die Funktion Ψ: $\partial_\mu \partial^\mu \Psi = \Box\Psi = 0$
- Phaseninvarianz einer ebenen Welle: $k_\mu x^\mu$

b) Man kann z.B. $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ ausnutzen:

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{rot}\left(\mathbf{E}_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right) = \mathrm{i}\mathbf{k}\times\mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x^\mu} = \mathrm{i}k \begin{pmatrix} -\mathrm{i}E_0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{B}_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kz-\omega t)}\right) = \frac{\mathrm{i}\omega}{c}\mathbf{B}_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$$

Nach der Dispersionsrelation gilt $k_\mu k^\mu = 0$ ist $ck = \omega$ und damit:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}E_0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schneller geht es mit der für ebene Wellen gültige Beziehung $\hat{\mathbf{e}}_k \times \mathbf{E} = \mathbf{B}$.

c)

$$(k'^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\omega'}{c} \\ \\ \mathbf{k}' \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{\omega}{c} \\ -\beta\gamma\frac{\omega}{c} \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Die Felder transformieren so:

$$\mathbf{E}'_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i}E_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{v}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\mathrm{i}E_0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} E_0 \\ \mathrm{i}\gamma E_0 \\ \gamma\beta E_0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}'_0 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \left[\begin{pmatrix} 0 \\ E_0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{v}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_0 \\ \mathrm{i}E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}E_0 \\ \gamma E_0 \\ -\mathrm{i}\gamma\beta E_0 \end{pmatrix}$$

d) Offensichtlich ist

$$\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}'_0\right] \cdot \mathbf{k}' = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ \gamma\beta E_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\beta\gamma k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = 0$$

Daher ist die Richtung tatsächlich orthogonal. Mit $1 + \gamma^2\beta^2 = \gamma^2$ ist der Vektor

$$\hat{\mathbf{e}}' = \frac{1}{|\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}'_0\right]|} \mathrm{Re}\left[\mathbf{E}'_0\right] = \begin{pmatrix} \gamma^{-1} \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix}$$

e)

$$\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{e}}' = \begin{pmatrix} -\beta\gamma k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \gamma^{-1} \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} = \gamma k \hat{\mathbf{e}}_y$$

Die Komponente von $\mathbf{E}'_0$ in der Richtung von $\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{e}}'$ ist $\mathrm{i}\gamma E_0$ und damit gerade i mal der Komponente in Richtung $\hat{\mathbf{e}}'$. Denn diese ist:

$$\mathbf{E}' \cdot \mathbf{e}' = \left(\gamma^{-1} + \gamma\beta^2\right) E_0 = \gamma E_0$$

Die Welle ist also wieder rechtszirkular.
