Spezielle Relativitätstheorie und Elektrodynamik

Aufgabe 1

Im Bezugsystem K treten zwei nahezu gleich gute Läufer im Abstand d voneinander an die auf der x-Achse liegende Startlinie und warten auf das Signal zu einem Lauf parallel zur y-Achse. Die beiden Starter, die jeweils neben den Läufern stehen, feuern ihre Startpistole mit einem kleinen Zeitunterschied ab, so dass der bessere der beiden Läufer benachteilegt wird. Im System K beträgt der Zeitunterschied T.

a) Für welchen Bereich von Zeitunterschieden gibt es ein Bezugssystem K', in dem es zu keiner Benachteiligung kommt, und für welche Skala von Zeitunterschieden gibt es ein System K', in dem eine tatsächliche Benachteiligung (und nicht nur eine scheinbare) Benachteiligung auftritt?

b) Wie lauten die zu diesen beiden Möglichkeiten gehörenden Lorentz-Transformation von K nach K'?

Aufgabe 2

Ein Drahtring D mit Radius R bewege sich gleichförmug mit konstanter Geschwindigkeit im Feld eines im Koordinatenursprung ruhenden magnetischen Dipols mit Dipolmoment $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{e}}_z$. Die Lage des Rings in Abhängigkeit der Zeit t sei - unter Vernachlässigung der Dicke - gegeben durch $x^2 + y^2 = R^2$ und $z = vt$.

a) Welche Ringspannung $U = \int_D \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s}$ wird in der Schleife induziert, wenn man das Feld des Rings vernachlässigt.

b) Skizzieren sie den Verlauf der Ringspannung als Funktion von t. Für welche Werte von t wird die Ringspannung extremal?

Aufgabe 3

Ein Teilchen mit Masse M und Ladung $q > 0$ bewegt sich in einem elektrischen und magnetischen Feld. Diese sind räumlich und zeitlich konstant:

$$\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{e}}_z \qquad \mathbf{B} = B\hat{\mathbf{e}}_x \qquad E, B > 0$$

a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $\mathbf{r}(t)$ des nichtrelativistischen Teilchens mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{r}(0) = \mathbf{v}(0) = 0$.

b) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_1$ des Teilchens, bei der es keine Beschleunigung erfährt.

c) Betrachten Sie nun ein Bezugssystem in dem das Magnetfeld verschwindet. Dort hat das Teilchen die entsprechend transformierte Geschwindigkeit $\mathbf{v'}_1$, es erfährt aber eine Beschleunigung durch das elektrische Feld. Wie ist das mit einer gleichförmig Bewegung im System aus b) vereinbar?

Aufgabe 4

Eine im Vakuum in x-Richtung laufende, zirkular polarisierte Welle wird durch das elektrische Feld

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathrm{Re}\,[f(x - ct)(\hat{\mathbf{e}}_y + \mathrm{i}\hat{\mathbf{e}}_z)]$$

beschrieben, worin f eine beliebige, komplexwertige Funktion darstellt. Ermitteln Sie aus den Maxwell-Gleichungen das zugehörige Magnetfeld und berechnen Sie die Energiedichte, den Poyntingvektor, die Impulsdichte sowie den Spannungstensor der Welle.

Aufgabe 5

Ein Stab, der in Ruhe die Länge L besitzt, fliegt an Ihnen mit der Geschwindigkeit v in Richtung seiner Ausdehnung vorbei.

a) Wie lange dauert es, bis er an Ihnen vorbei ist?

b) Wie lange dauert dieser Vorgang im Ruhesystem des Stabes?

c) Vergleichen Sie die beiden Zeiten.

d) Ist das Ergebnis mit der Zeitdilitation verträglich und, wenn ja, wieso?

e) Ein Stab der Länge L ruht im System S in einem Winkel α zur x-Richtung. Berechnen Sie die Lorentz-Kontraktion des Stabes in einem in x-Richtung mit Geschwindigkeit v bewegten Bezugssystem.

Aufgabe 6

Die Stromdichte j^μ verhält sich unter Lorentz-Transformationen wie ein Vierer-Vektor. Wie sieht das aber mit der Ladungsdichte ρ aus? Welche Konsequenzen hat dieses Verhalten für die Gesamtladung $Q = \int \mathrm{d}^3x\, \rho$?

Aufgabe 7

Ein unendlich langer, gerader Draht von vernachlässigbar geringem Querschnitt befinde sich im Inertialsystem K' in Ruhe und trage eine homogene Linienladungsduchte λ. Das System K' und der Draht bewege sich gegenüber dem Laborsystem K mit der Gesichwindigkeit $\mathbf{v}$ parallel zur Achse des Drahtes.

a) Man gebe die durch Zylinderkoordinaten ausgedrückten elektrischen und magnetischen Felder im Ruhesystem des Drahtes an. Unter Verwendung der Lorentz-Transformationeigenschaften der Felder bestimme man die Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder im Laborsystem.

b) Wie lauten die Ladungs- und Stromdichten des Drahtes in seinem Ruhesystem und im Laborsystem? Aus den Ladungs- und Stromdichten im Laborsystem berechne man direkt die entsprechenden elektrischen und magnetischen Felder und vergleiche das Ergebnis mit a).

Aufgabe 8

Eine alternative Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes ist

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu$$

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für A^μ her. Unter welchen Voraussetzung stimmt sie mit den Maxwell-Gleichungen $\partial_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu$ überein?

b) Überlegen Sie, wie diese Lagrange-Dichte aus der Dichte $\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j_\mu A^\mu$ hervorgeht.

Aufgabe 9

Gegeben sei ein statisches, homogenes elektrisches Feld E_0 parallel zur x-Achse sowie ein statisches, homogenes Magnetfeld $B_0 = 2E_0$, das in der x-y-Ebene liegt, und mit der x-Achse den Winkel θ bildet. Bestimmen Sie die Relativgeschwindigkeit eines Bezugssystems, in dem die elektrischen und magnetischen Felder zueinander parallel sind. Wie lauten die Felder in diesem System für $\theta \ll 1$ und $\theta \to \frac{\pi}{2}$?
Hinweis: Untersuchen Sie den Fall $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{e}}_z$.

Aufgabe 10

Ein Ring in der x-y-Ebene mit Radius a hat die Linienladungsdichte $\lambda = \lambda_0 \left|\sin \frac{\phi}{2}\right|$. Er rotiert um seine Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω. Berechnen Sie die retardierende Potentiale an seinem Mittelpunkt.
Hinweis:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\, \cos\beta + \sin\beta\, \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\, \cos\beta - \sin\alpha\, \sin\beta$$

Aufgabe 11

Ein Teilchen bewegt sich im System K mit Geschwindigkeit $\mathbf{v_1}$. Das System K' bewegt sich relativ zu K mit der Geschwindigkeit $v_2\hat{\mathbf{e}}_x$. Berechnen Sie durch Lorentz-Transformation, welche Geschwindigkeit es im K' hat und Zeigen Sie damit die relativistische Geschwindigkeitsaddition.

Aufgabe 12

Eine ebene elektromagnetische Welle $\mathbf{E}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{E}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$ propagiert im Vakuum im Bezugssystem K in z-Richtung und ist rechtszirkular polerisiert:

$$(k^\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ \\ \mathbf{k} \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_0 \\ \mathrm{i}E_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad E_0 \text{ reell}$$

a) Drücken Sie die folgenden Beziehungen so durch Vierer-Vektoren aus, dass ihre Lorentz-Invarianz deutlich sichtbar ist:
Lorentz-Eichung der Potentiale, Dispersionsrelation, Kontinuitätsgleichuung, Wellengleichung, Phaseninvarianz einer ebenen Welle

b) Geben Sie den Vorfaktor $\mathbf{B}_0$ für das zugehörige Magnetfeld, $\mathbf{B}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{B}_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_\mu x^\mu}$ an.

Das Bezugssystem K' , dessen Ursprung bei $t = 0$ mit dem bei von K übereinstimmt, bewegt sich (ohne Rotation) mit Geschwindigkeit v in x-Richtung in K. In K' sind die Felder der obigen Welle $\mathbf{E}'(t',\mathbf{x}') = \mathbf{E}'_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_\mu x'^\mu}$ und $\mathbf{B}'(t',\mathbf{x}') = \mathbf{B}'_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_\mu x'^\mu}$.

c) Berechnen Sie die Frequenz ω', den Wellenvektor $\mathbf{k}'$ und die Vorfaktoren $\mathbf{E}'_0$ und $\mathbf{B}'_0$ in K'.

d) Zeigen Sie, dass der Realteil von $\mathbf{E}'_0$ im Ortsteil von K' eine Richtung $\hat{\mathbf{e}}'$ definiert, die orthogonal zu $\mathbf{k}'$ ist.

e) Zeigen Sie, dass die Welle auch im System K' rechtszirkular polarisiert ist. Dazu genügt es zu zeigen, dass die Komponente von $\mathbf{E}'_0$ in der Richtung von $\mathbf{k}' \times \hat{\mathbf{e}}'$ gerade i mal die Komponente in Richtung $\hat{\mathbf{e}}'$ ist.