

1 Potentialentwicklung

Gegeben sei die Multipolentwicklung des Potentials aus dem Skript

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}{r^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{Q_{ij}x_i x_j}{r^5} + \dots \right)$$

- (a) Wie viele linear unabhängige Komponenten hat der Quadropoltensor Q_{ij} ?
Hinweis: Betrachten Sie Symmetrie und Spur des Tensors.
- (b) Gegeben seien 3 Ladungen, $q_1 = q$ bei $\mathbf{x}_1 = (a, 0, 0)$, $q_2 = q$ bei $\mathbf{x}_2 = (-a, 0, 0)$ und $q_3 = -2q$ bei $\mathbf{x}_3 = (0, 0, 0)$.
 Berechnen Sie explizit q , \mathbf{p} und Q_{ij} dieser Ladungsverteilung.

Lösung:

- (a) Quadropolmoment aus dem Skript:

$$Q_{ij} = \int (3x_i x_j - \mathbf{x}^2 \delta_{ij}) \rho(\mathbf{x}) d^3x$$

Offenbar ist $Q_{ij} = Q_{ji}$, das heißt Q_{ij} ist symmetrisch. Für die Spur von Q_{ij} gilt:

$$\text{Sp}(Q) = \sum_i Q_{ii} = \int \sum_i (3x_i^2 - \mathbf{x}^2) \rho(\mathbf{x}) d^3x = 0$$

Somit hat Q_{ij} $9 - 3 - 1 = 5$ unabhängige Komponenten.

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{xy} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{xz} & Q_{yz} & -(Q_{xx} + Q_{yy}) \end{pmatrix}$$

- (b) Die Ladungsverteilung lautet:

$$\rho(\mathbf{x}) = q\delta(\mathbf{x} - (a, 0, 0)) + q\delta(\mathbf{x} + (a, 0, 0)) - 2q\delta(\mathbf{x})$$

Daraus ergeben sich folgende Multipolmomente:

$$\begin{aligned} Q_{\text{ges}} &= q + q - 2q = 0 \\ \mathbf{p} &= \int \rho(\mathbf{x}) \mathbf{x} d^3x = q(a, 0, 0) - q(a, 0, 0) + 0 = 0 \\ Q_{xy} &= Q_{xz} = Q_{yz} = 0 \\ Q_{xx} &= 3 \cdot 2qa^2 - qa^2 - qa^2 = 4qa^2 \\ Q_{yy} &= Q_{zz} = -2qa^2 \end{aligned}$$

2 Spiegelladungen

Gegeben sei eine Punktladung Q am Ort \mathbf{x}_0 vom Mittelpunkt einer geerdeten leitenden Kugel mit Radius R ($R < |\mathbf{x}_0|$)

- (a) Bestimmen Sie das Potential außerhalb der Kugel mit Hilfe der Methode der Spiegelladungen.
Hinweis: Betrachten Sie eine Spiegelladung $Q_s = aQ$ am Ort $\mathbf{x}_s = b \mathbf{x}_0$ und finden Sie die Koeffizienten a und b aus der Randbedingung $\Phi = 0$ auf der Kugeloberfläche.
- (b) In der Realität befinden sich die induzierten Ladungen auf der Kugeloberfläche. Berechnen Sie die induzierte Oberflächenladungsdichte σ .

Lösung:

- (a) Wir wählen das Koordinatensystem so, dass der Ursprung im Mittelpunkt der Kugel liegt und $\mathbf{x}_0 = x_0 \mathbf{e}_z$. Laut dem Hinweis hat das Potential die Form

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{Q_s}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|} \right]$$

Aus der Randbedingung $\Phi(|\mathbf{x}| = R) = 0$ folgt:

$$\frac{Q}{|R\mathbf{e}_r - \mathbf{x}_0|} + \frac{aQ}{|R\mathbf{e}_r - b\mathbf{x}_0|} = 0$$

$$|R\mathbf{e}_r - b\mathbf{x}_0| = \sqrt{R^2 - 2bRx_0 \cos \vartheta + b^2x_0^2} = -a\sqrt{R^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta + x_0^2}$$

Dabei ist ϑ der Winkel zwischen \mathbf{x} und \mathbf{x}_0 . Offenbar ist der Koeffizient a negativ. Nun quadrieren wir diese Gleichung

$$R^2 - 2bRx_0 \cos \vartheta + b^2x_0^2 = a^2 (R^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta + x_0^2)$$

Damit dies gilt muss sowohl der winkelabhängige als auch der winkelunabhängige Teil auf beiden Seiten identisch sein

$$2bRx_0 \cos \vartheta = 2a^2 Rx_0 \cos \vartheta \quad (1)$$

$$R^2 + b^2x_0^2 = a^2 (R^2 + x_0^2) \quad (2)$$

Aus (1) folgt, dass $a^2 = b$. Setzt man dies in (2) ein folgt

$$b^2x_0^2 - b(R^2 + x_0^2) + R^2 = 0$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung für b sind:

$$b = 1 \quad \text{oder} \quad b = \frac{R^2}{x_0^2}$$

Die erste Lösung $b = 1, a = -1$ gibt ein global verschwindendes Potential $\Phi \equiv 0$, also die Lösung im inneren der Kugel. Die zweite Lösung $b = \frac{R^2}{x_0^2}, a = -\frac{R}{x_0}$ liefert das gesuchte Potential außerhalb der Kugel.

(b) $\sigma = \epsilon_0(\mathbf{E}_{\text{außen}} - \mathbf{E}_{\text{innen}}) \cdot \mathbf{e}_r|_{|\mathbf{x}|=R}$. Mit $\mathbf{E}_{\text{innen}} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \sigma &= -\epsilon_0 \text{grad } \Phi|_{|\mathbf{x}|=R} = \left[\frac{Q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} + \frac{Q_s(\mathbf{x} - \mathbf{x}_s) \cdot \mathbf{e}_r}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s|^3} \right]_{|\mathbf{x}|=R} \\ &= \frac{Q(R - x_0 \cos \vartheta)}{4\pi(R^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{aQ(R - bx_0 \cos \vartheta)}{4\pi(R^2 - 2bRx_0 \cos \vartheta + b^2x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{Q(R - x_0 \cos \vartheta)}{4\pi(R^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{R}{x_0}Q(R - \frac{R^2}{x_0} \cos \vartheta)}{4\pi\left(R^2 - 2\frac{R^3}{x_0} \cos \vartheta + \frac{R^4}{x_0^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{Q(R - x_0 \cos \vartheta)}{4\pi(R^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{R}{x_0}Q(R - \frac{R^2}{x_0} \cos \vartheta)}{4\pi\frac{R^3}{x_0^3}(x_0^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta + R^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{Q(R - x_0 \cos \vartheta) - \frac{x_0^2}{R^2}Q(R - \frac{R^2}{x_0} \cos \vartheta)}{4\pi(R^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{QR\left(1 - \frac{x_0^2}{R^2}\right)}{4\pi(R^2 - 2Rx_0 \cos \vartheta + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

3 Dipol im elektrischen Feld

Berechnen Sie die potentielle Energie eines Dipols \mathbf{p} am Ort x im elektrischen Feld

- (a) einer Punktladung q am Ursprung.
- (b) eines Dipols \mathbf{k} am Ursprung.
Hinweis: $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
- (c) Bestimmen Sie jeweils die Gleichgewichtslagen für festes gegebenes \mathbf{x} und diskutieren Sie deren Stabilität.

Lösung:

- (a) Das elektrische Feld einer Punktladung q am Ursprung ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

Damit ist die potentielle Energie des Dipols

$$U_{\text{el}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{x} \cdot \mathbf{p}}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \vartheta}{r^2}$$

(b) Das elektrische Feld eines Dipols \mathbf{k} am Ursprung ist

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{k} \cdot \hat{x})\hat{x} - \mathbf{k}}{r^3}$$

Damit ist die potentielle Energie des Dipols

$$\begin{aligned} U_{\text{el}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{k} \cdot \hat{x})(\hat{x} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p} - 3(\mathbf{k} \cdot \hat{x})(\hat{x} \cdot \mathbf{p})}{r^3} \\ &= \frac{pk}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2) - 3 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^3} = \frac{pk}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 - 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^3} \end{aligned}$$

(c) Fall (a):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial \vartheta} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \vartheta}{r^2} \\ \Leftrightarrow \vartheta &= 0 \quad \text{oder} \quad \vartheta = \pi \end{aligned}$$

Für $q > 0$ ist $\vartheta = 0$ die stabile Gleichgewichtslage und $\vartheta = \pi$ labil, für $q < 0$ ist es anders herum.

Fall (b):

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial \vartheta_1} = \frac{pk}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + 2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{r^3} \\ \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 &= -2 \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \end{aligned} \tag{3}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U_{\text{el}}}{\partial \vartheta_2} = \frac{pk}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + 2 \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2}{r^3} \\ \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 &= -\frac{1}{2} \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \end{aligned} \tag{4}$$

(3) – (4) liefert

$$\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2 = 0$$

und damit

$$\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 = 0$$

Somit ergeben sich folgende Gleichgewichtslagen

ϑ_1	ϑ_2	Stabilität
0	0	stabil
π	π	stabil
π	0	instabil
0	π	instabil
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	Sattelpunkt
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	Sattelpunkt
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	Sattelpunkt
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	Sattelpunkt

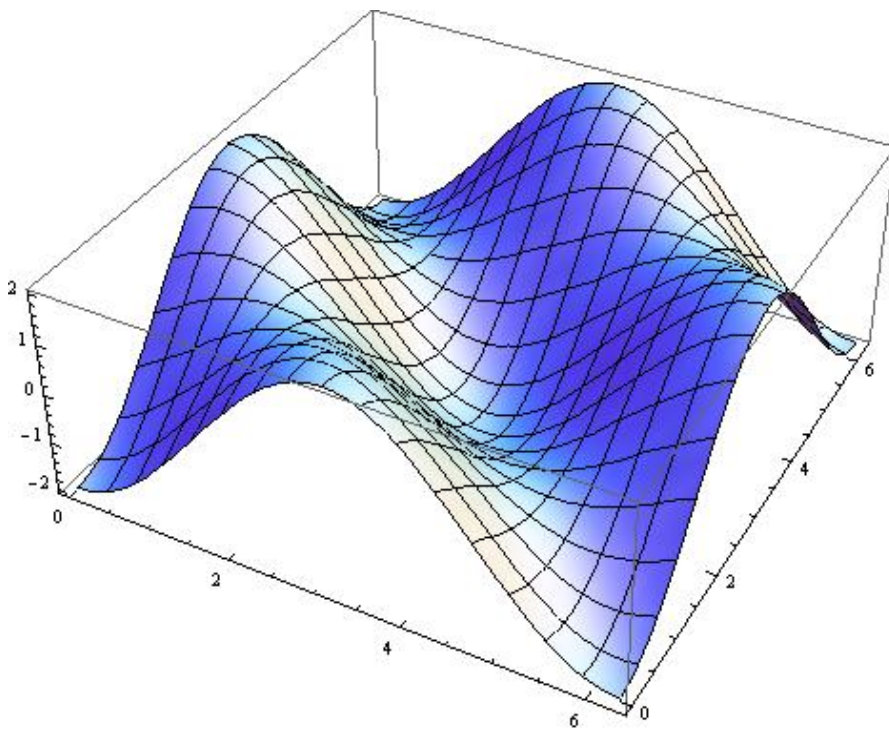


Abbildung 1: Energie in Abhängigkeit der von ϑ_1 und ϑ_2

Zur Bestimmung der Stabilitäten wird dabei die Hesse-Matrix von U_{el} benötigt:

$$\frac{\partial^2 U_{el}}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} = \frac{pk}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 & \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - 2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \\ \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - 2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 & -\sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + 2 \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 \end{pmatrix}$$

Sind beide Eigenwerte positiv, handelt es sich um ein stabiles Gleichgewicht.

Sind beide Eigenwerte negativ, handelt es sich um ein instabiles Gleichgewicht.

Wenn beide Eigenwerte verschiedene Vorzeichen haben, handelt es sich um einen Sattelpunkt.

4 Punktladung und Dielektrikum

Bestimmen Sie das von einer Punktladung q erzeugte Feld, wobei q sich in einer Entfernung h von einer ebenen Grenzfläche zwischen dem Vakuum und einem dielektrischen Medium mit Dielektrizitätskonstante ϵ befindet. Diskutieren Sie darüber hinaus den Grenzfall $\epsilon \rightarrow \infty$.

Hinweis: Verwenden Sie die Methode der Spiegelladungen.

Lösung:

Grenzfläche $z = 0$, Position der Punktladung $\mathbf{x}_0 = (0, 0, h)$. $\Phi^{(1)}$ sei das Potential im Vakuum $z \geq 0$ und $\Phi^{(2)}$ das Potential im Medium $z < 0$. Es müssen folgende Randbedingungen erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^{(1)} = \mathbf{E}_t^{(2)} &\Rightarrow \Phi^{(1)}|_{z=0} = \Phi^{(2)}|_{z=0} \\ \mathbf{D}_n^{(1)} = \mathbf{D}_n^{(2)} &\Rightarrow \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial z}|_{z=0} = \epsilon \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial z}|_{z=0} \end{aligned}$$

Zur Lösung nehmen wir die Existenz einer Spiegelladung q_s am Ort $\mathbf{x}_s = (0, 0, -h_s)$ für die Berechnung von $\Phi^{(1)}$ bzw am Ort $\mathbf{x}_s = (0, 0, h_s)$ für die Berechnung von $\Phi^{(2)}$ an. Damit folgt

$$\begin{aligned} \Phi^{(1)}(\mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} + \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + h_s)^2}} \\ \Phi^{(2)}(\mathbf{x}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h)^2}} + \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - h_s)^2}} \end{aligned}$$

Die erste Randbedingung ist damit offensichtlich erfüllt. Aus der zweiten folgt

$$\begin{aligned} \left[\frac{q(2z - 2h)}{(x^2 + y^2 + (z - h)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q_s(2z + 2h_s)}{(x^2 + y^2 + (z + h_s)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{z=0} &= \epsilon \left[\frac{q(2z - 2h)}{(x^2 + y^2 + (z - h)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q_s(2z - 2h_s)}{(x^2 + y^2 + (z - h_s)^2)^{\frac{3}{2}}} \right]_{z=0} \\ \left[-\frac{qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q_s h_s}{(x^2 + y^2 + h_s^2)^{\frac{3}{2}}} \right] &= \epsilon \left[-\frac{qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{q_s h_s}{(x^2 + y^2 + h_s^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \\ \frac{(\epsilon + 1)q_s h_s}{(x^2 + y^2 + h_s^2)^{\frac{3}{2}}} &= -\frac{(\epsilon - 1)qh}{(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Dies muss für beliebige x, y gelten. Also müssen die Nenner identisch sein, das heißt $h_s = h$. Aus der Gleichheit der Zähler folgt $q_s = -\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}q$. Die elektrischen Felder sind:

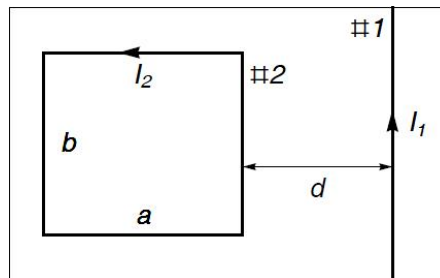
$$\mathbf{E}^{(1)} = \frac{q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} - \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1} \frac{q(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} + \mathbf{x}_0|^3} \quad (z \geq 0)$$

$$\mathbf{E}^{(2)} = \frac{2}{\epsilon+1} \frac{q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{4\pi\epsilon_0|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^3} \quad (z < 0)$$

Der Limes $\epsilon \rightarrow \infty$ verhält sich das Dielektrikum wie ein Metall. Es gilt $q_s = -q$ und das elektrische Feld im Medium verschwindet.

5 Wechselwirkung zwischen Drähten

Ein dünner rechteckiger Draht #2 befinde sich in der skizzierten Weise neben einem dünnen, unendlich langen Draht #1. Die Drähte werden von den Gleichströmen I_1 und I_2 durchflossen. Welche Kraft üben die Drähte aufeinander aus?



Lösung:

Wir wählen Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) so, dass der Draht #1 auf der z -Achse liegt. Das Magnetfeld des Drahtes #1 wurde im Skript hergeleitet

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\varphi$$

Die magnetische Kraft, die ein äußeres Magnetfeld auf ein Strom führendes Drahtelement $d\mathbf{l}$ ausübt, ist:

$$d\mathbf{F}(\mathbf{x}) = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}(\mathbf{x})$$

Somit ist die Kraft zwischen den beiden Drähten

$$\mathbf{F} = \oint_{\#2} I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B}_1$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[\int_0^b \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) dz \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varphi + \int_d^{d+a} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) dx \mathbf{e}_\rho \times \mathbf{e}_\varphi \right]$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(\frac{b}{a} - \frac{b}{d+a} \right) \mathbf{e}_\rho$$

Die beiden Drähte ziehen sich also an.

6 Leitende Kugel im Magnetfeld

Berechnen Sie das magnetische Dipolmoment einer ideal leitenden Kugel mit Radius R in einem konstanten externen Magnetfeld \mathbf{B} .

Lösung:

Wir wählen Kugelkoordinaten mit dem Ursprung im Kugelmittelpunkt. Der induzierte Oberflächenstrom ist

$$\mathbf{k} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \mathbf{e}_r$$

Demnach ist das Dipolmoment

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \int \mathbf{x} \times \mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3x = -\frac{1}{\mu_0} \int R^2 d\Omega \mathbf{x} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r) = -\frac{R^3}{\mu_0} \int d\Omega \mathbf{e}_r \times (\mathbf{B} \times \mathbf{e}_r) \\ \mathbf{m} &= -\frac{R^3}{\mu_0} \int d\Omega \left[\mathbf{B}(\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r) - \underbrace{\mathbf{e}_r (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_r)}_{=0} \right] = -\frac{4\pi R^3}{\mu_0} \mathbf{B} \end{aligned}$$

7 Magnetfeld einer rotierenden Kreisscheibe

Eine dünne Kreisscheibe mit Radius R besitze eine homogene Flächenladungsdichte σ . Die Scheibe dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse.

- Wie lautet die Stromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{x})$?
- Berechnen Sie das Magnetfeld entlang der Symmetrieachse.

$$\text{Hinweis: } \int \frac{x^3}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Lösung:

Wir wählen Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) so, dass die Symmetrieachse auf der z -Achse liegt und der Mittelpunkt der Scheibe im Ursprung.

- Die Stromdichte in diesen Koordinaten lautet

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}) = \sigma \rho \omega \delta(z) \mathbf{e}_\varphi$$

(b) Wir verwenden das Biot-Savart-Gesetz aus dem Skript

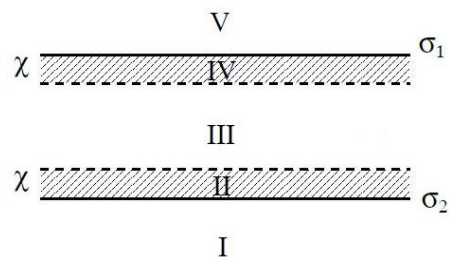
$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3x' = \frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi} \int \frac{\rho' \mathbf{e}_{\varphi'} \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \delta(z') d^3x' \\ &= \frac{\mu_0\sigma\omega}{4\pi} \int \rho'^2 \frac{z \mathbf{e}_{\rho'} + \rho' \mathbf{e}_z}{(z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho' d\varphi'\end{aligned}$$

Der erste Summand fällt bei Integration über φ' heraus. Somit:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \int_0^R \frac{\rho'^3}{(z^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \mathbf{e}_z d\rho' = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left(\frac{2z^2 + \rho'^2}{\sqrt{z^2 + \rho'^2}} \right)_0^R \mathbf{e}_z \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0\sigma\omega}{2} \left(\frac{2z^2 + R^2}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 2|z| \right) \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

8 Dielektrische Platten

Zwei unendlich große, dünne, leitende Platten tragen die konstante Oberflächenladung $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma$. In den schraffierten Regionen II und IV befindet sich dielektrisches Material mit konstanter elektrischer Suszeptibilität χ .



Berechnen Sie

- die dielektrische Verschiebung \mathbf{D} in jeder der 5 Regionen.
- das elektrische Feld \mathbf{E} in jeder der 5 Regionen.
- die induzierten Polarisationsladungen.

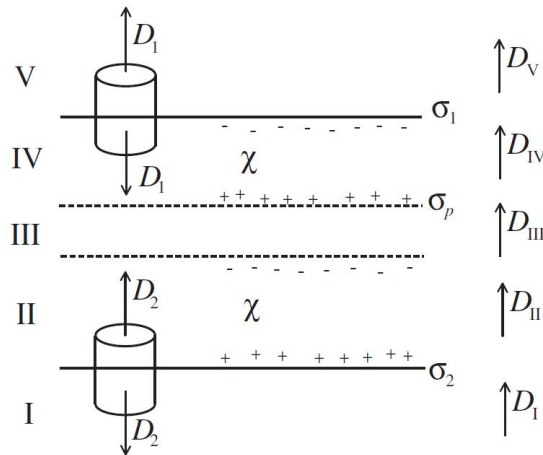
Lösung:

(a)

Mit dem Gaußschem Satz ergibt sich für das zylinderförmige Volumen in der Skizze mit Deckfläche A

$$2AD_1 = \sigma_1 A \quad \Rightarrow \quad D_1 = \sigma_1/2 = \sigma/2$$

Analog $D_2 = -\sigma/2$. Daraus folgt für die dielektrische Verschiebung in den 5 Regionen:



$$\mathbf{D}_I = (D_1 + D_2)\mathbf{e}_z = 0$$

$$\mathbf{D}_V = (-D_1 - D_2)\mathbf{e}_z = 0$$

$$\mathbf{D}_{II} = \mathbf{D}_{III} = \mathbf{D}_{IV} = (-D_1 + D_2)\mathbf{e}_z = -\sigma\mathbf{e}_z$$

(b) Mit $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0(1+\chi)}\mathbf{D}$ folgt direkt:

$$\mathbf{E}_I = \mathbf{E}_V = 0$$

$$\mathbf{E}_{III} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{E}_{II} = \mathbf{E}_{IV} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0(1+\chi)}\mathbf{e}_z$$

(c) Die Lage der Polarisationsladungen ist im Bild eingezeichnet. Es gilt

$$\mathbf{P}_{IV} = \mathbf{P}_{II} = \mathbf{D}_{II} - \epsilon_0\mathbf{E}_{II} = \left(-\sigma + \frac{\sigma}{1+\chi}\right)\mathbf{e}_z = -\frac{\chi}{1+\chi}\sigma\mathbf{e}_z$$

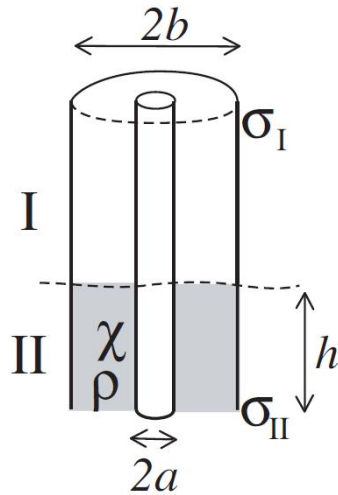
Betragsmäßig ist die Polarisationsladungsdichte also

$$\sigma_P = \frac{\chi}{1+\chi}\sigma$$

9 Zylinderkondensator mit Medium

Zwei unendlich lange, dünne, leitende, koaxiale zylindrische Flächen mit Radien a , b werden senkrecht in eine dielektrische Flüssigkeit mit konstanter elektrischer Suszeptibilität χ und konstanter Dichte ρ eingeführt. Zwischen den beiden Flächen wird eine konstante Spannung U aufrecht erhalten. Berechnen Sie die Höhe, auf welche die Flüssigkeit zwischen den beiden Flächen steigt, wenn die elektrische Suszeptibilität der Luft und Effekte durch die Oberflächenspannung der Flüssigkeit vernachlässigt werden können.

Hinweis: Die gespeicherte Energie in einem Kondensator bei konstanter Spannung ist $E = \frac{1}{2}CU^2$, wobei C der Kapazität entspricht.



Lösung:

Aus dem Skript wissen wir, dass die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes im Kondensator an der Grenzfläche $z = h$ stetig ist. Aus Symmetrieüberlegungen folgt, dass $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = |\mathbf{E}(r)|\mathbf{e}_r$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) . Somit ist das elektrische Feld für beide Regionen identisch. Aus dem Gaußschen Satz folgt mit einem Zylinder der Länge l in Region I als Integrationsvolumen

$$\int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d^3x = \oint_{\partial V} |\mathbf{E}(r)| \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{f}$$

$$\frac{2\pi a l \sigma_{\text{in}}^{(I)}}{\epsilon_0} = 2\pi r l |\mathbf{E}(r)|$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_{\text{in}}^{(I)}}{\epsilon_0} \frac{a}{r} \mathbf{e}_r$$

Demnach ist das skalare Potential

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{\sigma_{\text{in}}^{(I)}}{\epsilon_0} a \ln r + \text{const}$$

Aus der Bedingung $U = \Delta\Phi$ folgt:

$$U = \frac{a\sigma_{\text{in}}^{(I)}}{\epsilon_0} (\ln b - \ln a) = \frac{a\sigma_{\text{in}}^{(I)}}{\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

$$\sigma_{\text{in}}^{(I)} = \frac{\epsilon_0 U}{a \ln \frac{b}{a}}$$

und damit

$$\Phi(\mathbf{x}) = -U \frac{\ln r}{\ln \frac{b}{a}} + \text{const}$$

Die Flächenladungsdichte $\sigma_{\text{in}}^{(II)}$ in Region II folgt mithilfe der dielektrischen Verschiebung in Region II

$$\sigma_{\text{in}}^{(II)} = |\mathbf{D}^{(II)}(r = a)| = |\epsilon\epsilon_0 \mathbf{E}(r = a)| = \frac{\epsilon\epsilon_0 U}{a \ln \frac{b}{a}}$$

Die Differenz der Feldenergie im Kondensators durch den Anstieg der Flüssigkeit ist

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{el}} &= \frac{1}{2} C' U^2 - \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} U (Q' - Q) = \frac{1}{2} U \left(2\pi a h \sigma_{\text{in}}^{(II)} - 2\pi a h \sigma_{\text{in}}^{(I)} \right) \\ \Delta W_{\text{el}} &= U \pi a h \left(\frac{\epsilon\epsilon_0 U}{a \ln \frac{b}{a}} - \frac{\epsilon_0 U}{a \ln \frac{b}{a}} \right) = \pi \epsilon_0 h U^2 \frac{\epsilon - 1}{\ln \frac{b}{a}} \end{aligned}$$

Die potentielle Arbeit die aufgewendet werden muss um die Flüssigkeit entgegen der Gravitationskraft anzuheben beträgt

$$W_{\text{pot}} = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b r dr \rho g z = \frac{\pi}{2} \rho g h^2 (b^2 - a^2)$$

Beide Beiträge sind positiv. Woher kommt diese Energie?

Die Energie muss von der Spannungsquelle aufgewendet werden um U konstant zu halten. Wie oben diskutiert steigt die Flächenladungsdichte durch den Einfluss des Dielektrikums. Um diese zusätzliche Ladung auf die Leiter zu transportieren muss die Spannungsquelle die Arbeit

$$W_{\text{Spannungsquelle}} = (Q' - Q)U = 2W_{\text{el}}$$

aufbringen. Gleichsetzen und Auflösen nach h liefert

$$\begin{aligned} W_{\text{Spannungsquelle}} &= W_{\text{el}} + W_{\text{pot}} \\ 2W_{\text{el}} &= W_{\text{el}} + W_{\text{pot}} \\ \pi \epsilon_0 h U^2 \frac{\epsilon - 1}{\ln \frac{b}{a}} &= \frac{\pi}{2} \rho g h^2 (b^2 - a^2) \\ h &= \frac{2\epsilon_0 U^2 \chi}{\rho g (b^2 - a^2) \ln \frac{b}{a}} \end{aligned}$$