Ferienkurs Experimentalphysik 3

Donnerstag Musterlösung

28. März 2011

1 Quantenphänomene

1.1 Gravitationsrotverschiebung

(a) Die potentielle Energie eines Photons in der Nähe der Erdoberfläche ist $U_P = mgs$, wobei $g = 9.81\frac{m}{s^2}$ die Gravitationskonstante ist und die Masse ber $mv^2 = hh\nu$ berechnet werden kann. Es gilt

$$h\nu_s = h\nu - mgs = h\nu(1 - \frac{nugs}{c^2}) \tag{1}$$

daraus folgt

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = -\frac{gs}{c^2} = 5.45 \cdot 10^{-16} \tag{2}$$

(b) hier nutzen wir die Unschärferelation aus der Vorlesung: $\Delta E \cdot \tau = \Delta E \cdot \frac{T_{1/2}}{\ln(2)} \approx \hbar$ durch Umformen erhalten wir

$$\frac{\Delta E}{E} \approx \frac{\hbar}{\tau h\nu} = \frac{\lambda}{2\pi hc} \tag{3}$$

Für den Natriumübergang erhalten wir $1.9 \cdot 10^{-8}$. Da die viel breiter als (1.1) ist, kann man die Rotverschiebung nicht erkennen. Für den Kernübergang erhalten wir allerdings $5.4 \cdot 10^{-16}$, was in der Größenordung von (liegt. Die Rotverschiebung ist hier also beobachtbar.
(c) Allgemein gilt:

$$\left|\frac{\Delta E}{E}\right| = \left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right| = \left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| = \left|\frac{\lambda/N}{\lambda}\right| = \frac{1}{N} \tag{4}$$

Für die zweite Umformung verwendet man $\nu = \frac{c}{\lambda}$ und bildet die Ableitung.

$$saxa \tag{5}$$

$$\frac{\partial\nu}{\nu} = -\frac{\partial\lambda}{\lambda} \Rightarrow \left|\frac{\Delta\nu}{\nu}\right| = \left|\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right| \tag{6}$$

1.2 Photonen und Rückstoß

a) Da die Ruheenergie eines einzelnen Nukleons im GeV Bereich liegt, kann weder ein Atomhüllenübergang (eV Bereich) noch ein direkter Kernübergan (MeV Bereich) dafür sorgen, das die Geschwindigkeit des Atomkerns aufgrund der Impulserhaltung groß genug wäre, als das man relativistisch rechnen müsste. Es gilt also

$$p_A = \sqrt{2M_A E_{kin,A}} = p_\gamma = \frac{E_\gamma}{c} = \frac{h}{c} \tag{7}$$

wir können nach der kinetischen Energie auflösen

$$E_{kin} = \frac{E_\gamma^2}{2M_A c^2} = \frac{h^2}{2M_A \lambda^2} \tag{8}$$

b) Wir setzen nun einfach die gegebenen Werte in die zuvor berechnete Formel ein

1. Für Quecksilber erhalten wir $E_\gamma = 4.89eV$ und $E_{kin,A} = 1.02 \cdot 20^{-29} J = 6.4 \cdot 10^{-11} eV$
2. Für Nickel erhalten wir $E_{kin,A} = 2.59 \cdot 20^{-18} J = 16.2eV$

c) Klassisch gesehen besitzt ein γ-Quant, nachdem es vom Atom ausgesendet wurde, nicht genug Energie um eine weitere Anregung durchzuführen. Es hat aufgrund des Energieverlustes durch den Impulsübertrag des Ausgangsatoms und des Energieübertrags an das Zielatoms weniger Energie als eine erneute Anregung benötigt. Allerdings kann es quantenmechanisch gesehen aufgrund der Unschärferelation sein, dass er doch die notwendige Energie besitzt. Um eine neue Anregung durchführen zu können muss für die Energie des Photons folgendes gelten (Annahme: Die Energie beider Impulsübertragungen sei gleich)

$$E_{\gamma'} + \frac{1}{2}\Delta E \geq E_\gamma + 2E_{kin,A} \tag{9}$$

Für die Unschärfe muss also gelten (mit $E_{\gamma'} = E_\gamma - E_{kin,A}$)

$$\Delta E \geq 2E_{kin,A} \tag{10}$$

Nun nutzen wir explizit die USR $\Delta E \cdot \Delta T \approx \hbar$ um die Energieunschärfen zu bestimmen und vergleichen sie mit den zuvor berechneten Impulsübertragsenergien

1. Für Quecksilber erhalten wir $\Delta E \approx 6.58 \cdot 10^{-8} eV \gg E_{kin,A}$. Da die Energie des Impulsübertrags kaum einen Einfluss hat, kann eine erneute Anregung stattfinden.
2. Für Nickel erhalten wir $\Delta E \approx 6.58 \cdot 10^{-8} eV \ll E_{kin,A}$. Da die Energie des Impulsübertrags hier deutlich größer als die Unschärfe ist, kann keine erneute Anregung stattfinden.

1.3 Photoeffekt

(a) Maximaler Photostrom bedeutet das alle freigeschlagenen Elektronen die Kathode erreichen. Wir nutzen

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad E = h\nu \qquad N_e = \eta N_{Ph} \qquad N_e = \frac{\Delta Q}{e} \tag{11}$$

Es gilt

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{N_{Ph} \cdot E_{Ph}}{\Delta t} = \frac{N_e E}{\eta \Delta t} = \frac{h\nu I}{\eta e} = \frac{hcI}{\eta e \lambda} \approx 1 \cdot 10^{-2} W \tag{12}$$

(b) Hier können selbst die energiereichsten Elektronen die Kathode nicht erreichen

$$E = eU = h\nu - W_A \tag{13}$$

umstellen liefert

$$W_A = \frac{hc}{\lambda} - eU \approx 1.94eV \tag{14}$$

(c)Da die Ruheenergie von Elektronen deutlich hher ist als die verwemdete Strahlungsenergie können wir klassisch rechnen.

$$E = \frac{hc}{\lambda} - W_a = \frac{1}{2} m v^2 \tag{15}$$

auflösen nach der Geschwindigkeit liefert

$$v = \sqrt{\frac{2(\frac{hc}{\lambda} - W_A)}{m}} \approx 5.8 \cdot 10^5 m/s \tag{16}$$

(c) Hier muss die Photonenenergie kleiner als die Autrittsarbeit sein

$$E = \frac{hc}{\lambda} \leq W_A \tag{17}$$

daraus folgt

$$\lambda \geq \frac{hc}{W_A} \approx 579nm \tag{18}$$

1.4 Bragg Reflexion

(a) Thermische Neutronen dürfen nicht relativistisch behandelt werden. Es gilt

$$E = k_B T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{19}$$

$$\Rightarrow p = \sqrt{2mE} \tag{20}$$

Mit der deBrogie Beziehung gilt

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx 1.81 \mathring{A} \tag{21}$$

Nun nutzen wir die Bragg Bedingung und lösen nach dem Gitterabstand auf

$$d = \frac{\lambda}{2sin(16.1^\circ)} \approx 3.17 \mathring{A} \tag{22}$$

(b) Um die Energie zu berechnen, nutzen wir einfach die vorhin berechnete Wellenlänge

$$E = \frac{hc}{\lambda} \approx 6.85keV \tag{23}$$

(c) Da die kinetische Energie hher als die Ruhemassenenergie ist, müssen wir relativistisch rechnen

$$E^2 = p^2c^2 + E_0^2 \Rightarrow p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2} \tag{24}$$

Nun nutzen wir wieder die deBrogie beziehung und erhalten für die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{h}{p} \approx 1pm \tag{25}$$

Setzen wir nun diesen Winkel in die Bragg-Beziehung ein, erhalten wir fr den Glanzwinkel

$$\theta = \arcsin\frac{\lambda}{2d} \approx 0.09° \tag{26}$$

Damit ist unser gestreuter Strahl in einem Winkel von 0.18° zur Einfallsebene messbar.

1.5 Compton Streuung

(a) Wir wissen das eine Energie von mindestens 100keV bentigt wird. Daraus errechnen wir die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{hc}{E} \approx 12.4pm \tag{27}$$

(b) Die Compton-Beziehung besagt

$$\Delta\lambda = \lambda_C(1 - \cos(\theta)) \approx 0.708 \cdot \lambda c \tag{28}$$

Da sich die Wellenlänge verdoppelt hat, gilt für die ursprüngliche Wellenlänge

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 2\lambda \tag{29}$$

$$\Rightarrow \lambda = \Delta\lambda \approx 0.708\lambda_C \tag{30}$$

$$f = \frac{c}{0.708\lambda_C} \approx 1.69 \cdot 10^{20}Hz \tag{31}$$

(c) Aufgrund der Energieerhaltung ist die Energie des Elektrons nach dem Stoß

$$E_{kin} = E_\gamma - E_{\gamma'} = hc(\frac{1}{0.708\lambda_C} - \frac{1}{1.416\lambda_C}) \approx 349keV \tag{32}$$

Da dies ähnlich gro wie die Ruhemasse eines Elektrons (511keV) ist, muss relativistisch gerechnet werden.

$$E_{kin} + m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\gamma^2}}c^2 \tag{33}$$

Mit $\gamma = \frac{v^2}{c^2}$ können wir nach v auflösen und erhalten

$$v = c \cdot \sqrt{(1 - \frac{E_0}{E_{kin} + E_0})^2} \approx 0.64c \approx 1.94 \cdot 10^8 m/s \tag{34}$$

2 Strahlungsgesetze

2.1 Sterne als schwarze Strahler

(a) Nach dem Stefan Bolzmann Gesetz gilt: $R = \sigma T^4$

1. Roter Stern: $R = 4.59 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$
2. Gelber Stern: $R = 73.5 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$
3. Blauer Stern: $R = 567 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$

(b)Für die Wellenllange nutzen wir das Wiensche Verschiebungsgesetz: $\lambda_{max} = \frac{0.2898cm \cdot K}{T}$

1. Roter Stern: $\lambda_{max} = 967nm$
2. Gelber Stern: $\lambda_{max} = 483nm$
3. Blauer Stern: $\lambda_{max} = 289nm$

(c) Zu berechnen ist Folgendes:

$$R = \frac{c}{4}u(T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} u_\lambda(\lambda, T)d\lambda = \int_{400nm}^{700nm} \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} d\lambda \tag{35}$$

Nun nutzen wir folgende Näherung

$$e^{hc/\lambda k_B T} - 1 \approx e^{hc/\lambda k_B T} \tag{36}$$

Und dazu substituieren wir

$$x = \frac{hc}{\lambda k_B T} \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{-hc}{\lambda^2 k_B T} dx \tag{37}$$

Damit wird unser Integral zu

$$I = \frac{-2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \int_{x_1}^{x_2} x^3 e^{-x} dx = \frac{-2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} [e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)]_{x_1}^{x_2} \tag{38}$$

Eingesetzt erhalten wir dann für die drei Sterne

1. Roter Stern: $R_S = 0.37 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$
2. Gelber Stern: $R_S = 27.2 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$
3. Blauer Stern: $R_S = 173.5 \cdot 10^6 \frac{W}{m^2}$

Der Anteil des im sichtbaren Bereich abgestrahlten Emissionsvermögen $r = \frac{R_S}{R}$ lautet also

1. Roter Stern: $r = 8.1\%$
2. Gelber Stern: $r = 37.1\%$
3. Blauer Stern: $r = 30.6\%$

2.2 Oberflächentemperatur

(a) Wir nutzen den Wienschen Verschiebungssatz und lösen nach der Temperatur auf

$$T = \frac{0.2898cm \cdot k}{465nm} \approx 6232K \tag{39}$$

(b)Hier können wir das Stefan-Bolzmann-Gesetz nutzen. Wir verwenden außerdem

$$A = 4\pi R^2 \qquad A_S = 4\pi r_S^2 \qquad A_E = 4\pi r_E^2 \qquad A_K = \pi R^2 \tag{40}$$

R ist hier der Abstand zwischen Erde und Sonne. Für die Strahlungsleistung der Sonne gilt

$$P_S = \sigma A_S T_S^4 \tag{41}$$

Daus folgt für die Intensität

$$I_S = \frac{P_S}{A} \tag{42}$$

Damit können wir die auf der Erde eingehende Strahlungsleistung bestimmen

$$P_E = I \cdot A_K = \sigma A_E T_E^4 \tag{43}$$

Der letzte Schritt ist durch das thermischen Gleichgewicht begründet, da hier die absprbierte Strahlung der abgestrahlten Leistung entsprichen muss. Durch Umformen erhalten wir

$$T_E = T_S \cdot \sqrt{\frac{A_S \cdot A_K}{A \cdot A_E}} = T_S \cdot \sqrt{\frac{r_S}{2R}} \approx 275K \tag{44}$$