Ferienkurs Experimentalphysik 1
2011

Probeklausur - Lösungsvorschlag

Sonde auf Mond schießen

Bestimmen Sie die notwendige Abschussgeschwindigkeit v_a einer Sonde, die den Punkt auf der direkten Verbindungslinie zwischen Erde und Mond erreichen soll, an dem sich die Beiträge zur Schwerkraft gerade aufheben. Mit welcher Geschwindigkeit schlägt die Sonde auf der Mondoberfläche auf, wenn sie mit einer beliebigen Geschwindigkeit $v_0 > v_a$ entlang der direkten Verbindungslinie abgeschossen wird? Hinweis: Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand. Vernachlässigen Sie ebenfalls die Rotation der Erde um ihre Achse und die Rotation des Mondes um die Erde.

Lösung:

Wir berechnen zuerst den Ort r_a (von der Erde aus) an dem sich die Beiträge zur Schwerkraft aufheben:

$$G\frac{m \cdot m_E}{r^2} \overset{!}{=} G\frac{m \cdot m_M}{(l-r)^2}$$

wobei m die Masse der Sonde, m_E die Masse der Erde, m_M die Masse des Mondes, r der Abstand vom Erdmittelpunkt und l der Abstand der Mittelpunkte Erde-Mond. Auflösen nach $r =: r_a$ ergibt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{l-r_a}{r_a}\right)^2 &= \frac{m_M}{m_E} \\
\left(\frac{l}{r_a} - 1\right) &= \sqrt{\frac{m_M}{m_E}} \\
\frac{l}{r_a} &= 1 + \sqrt{\frac{m_M}{m_E}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_a = \frac{l}{1 + \sqrt{m_M/m_E}}$$

Aus der Energieerhaltung folgt nun die Geschwindigkeit v_a welche die Sonde auf der Erde haben muss um den Punkt r_a gerade zu erreichen, d.h. dort keine Geschwindigkeit mehr zu haben.

$$\frac{1}{2}mv_a^2 - G\frac{mm_E}{r_E} - G\frac{mm_M}{l-r_E} = -G\frac{mm_E}{r_a} - G\frac{mm_M}{l-r_a}$$

also

$$\begin{aligned} v_a^2 &= 2G\left[\frac{m_E}{r_E} + \frac{m_M}{l-r_E} - \frac{m_E}{r_a} - \frac{m_M}{l-r_a}\right] \\ v_a &= \sqrt{2G\left[\frac{m_E}{r_E} + \frac{m_M}{l-r_E} - \frac{m_E}{r_a} - \frac{m_M}{l-r_a}\right]} \end{aligned}$$

Die Sonde wird nun mit $v_0 > v_a$ von der Erde abgeschossen und trifft den Mond bei $r = l - r_M$, also gilt die Energieerhaltung

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mm_E}{r_E} - G\frac{mm_M}{l-r_E} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mm_E}{l-r_M} - G\frac{mm_M}{r_M}$$

also

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2G\left[\frac{m_E}{l-r_M} + \frac{m_M}{r_M} - \frac{m_E}{r_E} - \frac{m_M}{l-r_E}\right]}$$

Eindimensionaler Stoß

Beim 1dimensionalen Stoß eines Teilchens mit der Masse m_1 und der Geschwindigkeit v_1 gegen ein Teilchen der Masse m_2 und der Geschwindigkeit v_2 kann nicht die gesamte kinetische Energie in innere Energie umgewandelt werden.

a) Wieviel kinetische Energie wird bei total inelastischer Kollision umgewandelt?
Lösung:
Es gelten die Impuls- und Energieerhaltung

$$\begin{aligned} p &= m_1v_1' + m_2v_2' \\ E &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 + Q \end{aligned}$$

wobei $p := m_1v_1 + m_2v_2$ und $E := \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$. Bei total inelastischer Kollision gilt $v_1' = v_2'$. Mit den Abkürzungen $M := m_1 + m_2$ und $v' = v_1' = v_2'$ vereinfachen sich dieses Gleichungen nun zu

$$\begin{aligned} p &= Mv' \\ E &= \frac{1}{2}Mv'^2 + Q \end{aligned}$$

Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite ergibt

$$\begin{aligned} Q &= E - \frac{p^2}{2M} \\ &= \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 - \frac{(m_1v_1 + m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)} \\ &= \frac{1}{2(m_1+m_2)}[m_1^2v_1^2 + m_1m_2v_1^2 + m_2m_1v_2^2 + m_2^2v_2^2 - m_1^2v_1^2 - 2m_1m_2v_1v_2 - m_2^2v_2^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2(m_1+m_2)} m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2) \\ &= \frac{m_1 m_2}{2(m_1+m_2)} (v_1 - v_2)^2 \end{aligned}$$

b) Zeigen Sie für den Fall $m_1 = m_2$, dass die bei total inelastischer Kollision umgewandelte kinetische Energie gleich der anfänglichen kinetischen Energie im Schwerpunktsystem ist.
Lösung:
Für $m_1 = m_2$ ist laut a)

$$Q = \frac{m}{4}(v_1 - v_2)^2$$

Im Schwerpunktsystem ist anfängliche kinetische Energie gegeben durch

$$\overline{E} = \frac{1}{2}m(v_1 - V)^2 + \frac{1}{2}m(v_2 - V)^2$$

wobei die Schwerpunktsgeschwindigkeit V gegeben ist durch

$$V = \frac{(mv_1 + mv_2)}{m+m} = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

Also

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \frac{m}{2}\left[\left(v_1 - \frac{1}{2}(v_1+v_2)\right)^2 + \left(v_2 - \frac{1}{2}(v_1+v_2)\right)^2\right] \\ &= \frac{m}{2}\frac{1}{4}\left[(v_1 - v_2)^2 + (v_2 - v_1)^2\right] \\ &= \frac{m}{4}(v_1 - v_2)^2 = Q \end{aligned}$$

Rotierender Zylinder

Auf einen homogenen Vollzylinder mit Radius R und Masse M ist ein Faden gewickelt, dessen Ende an der Decke befestigt ist. In der Höhe $h = h_0$ wird der Zylinder freigegeben. Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders beträgt $I = \frac{1}{2}Mr^2$. Mit welcher Geschwindigkeit $v(z)$ bewegt sich der Schwerpunkt des Zylinders nach unten?
Lösung:
Wir lösen das Problem über die Energieerhaltung. Diese besagt:

$$E_{pot} + E_{kin,Schwerpunkt} + E_{rot} = E_{Gesamt} \tag{1}$$

Wir setzen das Koordinatensystem nun so, dass die z-Achse nach unten zeigt und $z = 0$ f¸r $h = h_0$ gilt. Die Gesamtenergie ist somit zu Beginn die potentielle Energie

$$E_{Gesamt} = E_{pot,Anfang} = Mgh_0 \tag{2}$$

weiter gilt

$$E_{pot} = Mg(h_0 - z) \tag{3}$$

$$E_{kin,Schwerpunkt} = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{4}$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2 \tag{5}$$

Mit der Rollbedingung $v = \omega r$ sowie $I = \frac{1}{2}Mr^2$ ergibt sich die Gleichung

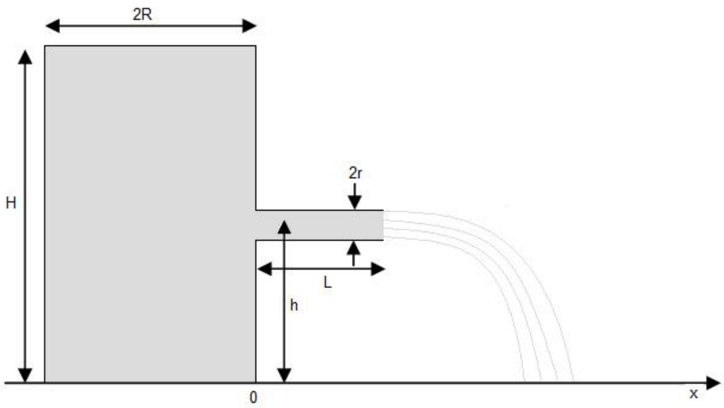
$$Mgh_0 = Mg(h_0 - z) + \frac{3}{4}Mv^2 \tag{6}$$

mit der Lösung

$$v(z) = \sqrt{\frac{4}{3}gz} \tag{7}$$

Zylinder

Aus einem mit Flüssigkeit bis zur Höhe H gefüllten Zylinder kann die Flüssigkeit aus einer seitlichen Öffnung in der Höhe h austreten (s. Abbildung).



- 1. Man berechne für eine reibungsfreie Fl¸ssigkeit den Auftreffpunkt x und die Auftreffgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ für $z = 0$. Vergleiche mit der Fallgeschwindigkeit, die ein aus der Höhe $z = H$ frei fallender Körper hat.
  Lösung:
  Der Druck in der Höhe h beträgt

  $$p(h) = \rho g(H - h) + p_0$$

  und am Ausflussrohr gilt die Bernoulligleichung

  $$\Delta p = p(h) - p_0 = \frac{1}{2}\rho v_x^2.$$

  Daraus folgt, dass $v_x^2 = 2g(H - h)$ ist. Die Flüssigkeitsteilchen durchlaufen eine

Wurfparabel mit der Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0 = (v_x, v_z = 0)$. Die Fallzeit kann aus

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

zu $t = \sqrt{2h/g}$ bestimmt werden. Der Auftreffpunkt $\boldsymbol{P}$ ist dann

$$\underline{\underline{\boldsymbol{P} = (x_a = v_x t, z = 0) = \left(2\sqrt{h(H-h)}, 0\right)}}.$$

Die Auftreffgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_\mathrm{a}$ ist

$$\underline{\underline{\boldsymbol{v}_\mathrm{a} = (v_x, v_z = gt) \quad \text{mit} \quad |v| = \sqrt{v_x^2 + v_z^2} = \sqrt{2gH}}}.$$

Dies ist dieselbe Geschwindigkeit, mit der ein Körper bei senkrechtem Fall aus der Höhe H auftrifft.

- 2. Wie ist die Zeitfunktion des Flüssigkeitsspiegels im Zylinder mit Radius R bei einer Flüssigkeit mit der Zähigkeit η, die in der Höhe $h = 0$ durch eine Röhre der Länge L mit Radius $r \ll R$ ausfließt?
  Lösung:
  Nach dem Hagen-Poiseuille-Gesetz gilt

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\pi R^2 \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi r^4}{8\eta L} \Delta p \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{r^4}{R^2} \frac{\rho g H}{8\eta L}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{H(t) = H_0 \exp\left(-\frac{r^4 \rho g}{8R^2 \eta L} \cdot t\right)}}$$

mit $H_0 = H(t = 0)$.

Antarktis-Park

In der Antarktis gibt es einen Antarktis-Park, ein beliebter Zeitvertreib für Pinguine. Eine besondere Attraktion ist eine scheibenförmige Eisscholle (Fläche A, Eisdicke D, Eisdichte ρ_E), die im Meer schwimmt (Wasserdichte ρ_W).

a) Welcher Volumenanteil des Eises befindet sich oberhalb der Wasseroberfläche?

b) Mit größtem Vergnügen springen Pinguine auf der Eisscholle so auf und ab, dass die Scholle anfängt zu schwingen. Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und lösen Sie diese allgemein. Mit welcher Periode T müssten die Pinguine springen, um die Scholle in der Resonanzfrequenz anzuregen (Masse der Pinguine und Reibung werden vernachlässigt)?

c) Wie groß müsste die Gesamtmasse der Pinguine auf der Eisscholle sein, damit ihr Gewicht die Scholle völlig untertaucht? (Wir nehmen an, dass sie erschöpft sind und nicht mehr springen.)

d) Aufgrund der globalen Erwärmung schmilzt die Eisscholle. Wie ändert sich dadurch der Wasserspiegel des Meeres? Begründen Sie Ihre Antwort. Die Temperatur des Meerwassers wird als unverändert angenommen. (Die Pinguine werden für diesen Teil der Aufgabe nicht berücksichtigt. Sie haben sich längst aus dem Staub (aus dem Schnee?) gemacht.)

Lösung:

a) Die Masse des Eises beträgt $M_{\mathrm{E}} = \rho_{\mathrm{E}} AD$. Die Masse des verdrängten Wassers beträgt $M_{\mathrm{W}} = \rho_{\mathrm{W}} A(D-x)$, wobei x die Höhe der Eisschicht ist, die aus dem Wasser ragt. Da sich das System im Gleichgewicht befindet muss die Gewichtskraft des Eises der Auftriebskraft durch das verdrängte Wasser entsprechen. Es gilt also $M_{\mathrm{E}} g = M_{\mathrm{W}} g$ woraus

$$\frac{x}{D} = \frac{V_{\mathrm{E}}^{\mathrm{oberhalb}}}{V_{\mathrm{E}}} = 1 - \frac{\rho_{\mathrm{E}}}{\rho_{\mathrm{W}}}$$

folgt.

b) Die x-Achse zeige nach oben. Die einwirkenden Kräfte sind die Auftriebskraft durch das verdrängte Wasser nach oben und die Gewichtskraft des Eises nach unten. Die Bewegungsgleichung lautet also

$$M_{\mathrm{E}} \ddot{x} = \rho_{\mathrm{W}} A g (D - x) - \rho_{\mathrm{E}} A g D,$$

welche der DGL der gedämpften Schwingung

$$\ddot{x} + \frac{\rho_{\mathrm{W}} A g}{M_{\mathrm{E}}} x = \frac{\rho_{\mathrm{W}} - \rho_{\mathrm{E}}}{M_{\mathrm{E}}} A D g = g \left(\frac{\rho_{\mathrm{W}}}{\rho_{\mathrm{E}}} - 1 \right)$$

entspricht. Die Schwingungsfrequenz lässt sich wie immer direkt ablesen

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{W}} A g}{M_{\mathrm{E}}}} = \sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{W}} g}{\rho_{\mathrm{E}} D}}.$$

Die Lösung der homogenen DGL ist die bekannte Schwingungsfunktion

$$x_{\mathrm{h}}(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t).$$

Da die Inhomogenität hier nur eine Konstante ist, wählen wir als Ansatz ebenfalls eine konstante Funktion $x_{\mathrm{p}}(t) = C$. Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$x_{\mathrm{p}}(t) = C = \frac{g \left(\frac{\rho_{\mathrm{W}}}{\rho_{\mathrm{E}}} - 1 \right)}{\omega^2} = \frac{M_{\mathrm{E}} (\rho_{\mathrm{W}} - \rho_{\mathrm{E}})}{A \rho_{\mathrm{W}} \rho_{\mathrm{E}}}.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t) = A\sin\left(\sqrt{\frac{\rho_\mathrm{W} g}{\rho_\mathrm{E} D}}t\right) + B\cos\left(\sqrt{\frac{\rho_\mathrm{W} g}{\rho_\mathrm{E} D}}t\right) + \frac{M_\mathrm{E}(\rho_\mathrm{W} - \rho_\mathrm{E})}{A\rho_\mathrm{W}\rho_\mathrm{E}}.$$

Die Eigenfrequenz ω des Systems ist die Resonanzfrequenz mit der die Pinguine die Eisscholle anregen müssten. Sie müssten also mit der Periode

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_\mathrm{E} D}{\rho_\mathrm{W} g}}$$

auf und ab springen.

c) Nun muss die Gewichtskraft der Eisscholle inklusive der Pinguine gerade gleich der Auftriebskraft durch das verdrängte Wasser sein. Es gilt also

$$\rho_\mathrm{E} ADg + mg = \rho_\mathrm{W} ADg.$$

Man erhält somit für die Masse der Pinguine

$$m = (\rho_\mathrm{W} - \rho_\mathrm{E})AD.$$

d) Nach dem Schmelzen nimmt das Eis folgendes Volumen ein

$$V = \frac{M_\mathrm{E}}{\rho_\mathrm{W}} = \frac{\rho_\mathrm{E}}{\rho_\mathrm{W}}AD.$$

Dies ist das Wasservolumen, das die Eisscholle verdrängt hat. Somit ändert sich der Meeresspiegel beim Schmelzen nicht.

Lichtimpuls

In einem Inertialsystem S ruht bei $x = 0$ ein Sender, der zum Zeitpunkt $t = \tau$ einen Lichtimpuls in positive x-Richtung ausstrahlt. Das Inertialsystem S' bewege sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v in positive x-Richtung. In S' ruht bei $x' = 0$ ein Empfänger.

a) Zeigen Sie: Wenn der Lichtimpuls empfangen wird, hat der Empfänger bezüglich S den Ort

$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}}$$

und die Uhr von S zeigt die Zeit

$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}}$$

b) Benutzen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe a) um die Ankunftszeit des Lichtimpulses bezüglich S' zu berechnen.

Lösung:

a) Vom System S aus wird die Bewegung des Lichtimpulses durch

$$x = c(t - \tau)$$

und die des Empfängers durch

$$x = vt$$

beschrieben. Gleichsetzen und Auflösen nach t ergibt

$$t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}}$$

und daraus folgt x zu

$$x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}}$$

b) Mit Hilfe der Lorentz-Transformation ergibt sich

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \\
&= \gamma\left(\frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{v}{c^2}\frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}}\right) \\
&= \gamma\left(\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}}\right)\tau \\
&= \gamma\left(1 + \frac{v}{c}\right)\tau \\
&= \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{v}{c}\right)\left(1 + \frac{v}{c}\right)}}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\tau \\
&= \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}\tau
\end{aligned}$$