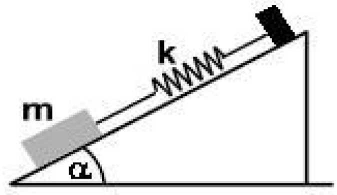
Ferienkurs Experimentalphysik 1
2011

Übung 4 - Musterlösung

1. Feder auf schiefer Ebene (**)

Auf einer schiefen Ebene mit Neigungswinkel $\alpha = 20°$ befindet sich ein Körper der Masse $m = 1$ kg. An dem Körper ist ein masseloser starrer Draht befestigt, der den Körper mit einer Feder der Federkonstanten D verbindet, die ihrerseits an der Spitze der schiefen Ebene befestigt ist.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung des Systems auf und lösen Sie diese für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Vernachlässigen Sie hierbei die Reibung.

b) Welche Federstärke D muss die Feder besitzen, damit die Masse mit einer Frequenz $\nu = 10$ Hz schwingt?

c) Welchen Einfluss hat der Neigungswinkel α auf das System?

Lösung:

a) Würde der Neigungswinkel $\alpha = 90°$ betragen, so hätten wir es mit einem ganz normalen Federpendel zu tun. Da aber in Aufgabenteil c) explizit nach der α-Abhängigkeit gefragt ist, werden wir diese gleich in der Bewegungsgleichung berücksichtigen.
Wählen wir die positive x-Richtung so, dass sie die schiefe Ebene herab zeigt, so ergibt sich bei einer Auslenkung der Feder um x aus der Ruhelage x_0 für die resultierende Kraft $F = F_{\mathrm{Hang}} - F_{\mathrm{Feder}}$, also

$$m\ddot{x} = mg\sin\alpha - Dx \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \omega^2 x = g\sin\alpha \text{ mit } \omega = \sqrt{D/m}.$$

Die Lösung der homogenen DGL ist die bekannte Schwingungsfunktion

$$x_{\mathrm{h}}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)$$

Da die Inhomogenität hier nur eine Konstante ist, wählen wir als Ansatz ebenfalls eine konstante Funktion $x_{\mathrm{p}}(t) = C$. Eingesetzt in die DGL ergibt sich

$$x_{\mathrm{p}}(t) = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2} = x_0.$$

Die totale Lösung lautet somit

$$x(t) = x_{\mathrm{h}}(t) + x_{\mathrm{p}}(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t) + \frac{g\sin\alpha}{\omega^2}.$$

Mit den Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erhält man für die Koeffizienten

$$A = \frac{v_0}{\omega}$$
$$B = 0.$$

Man erhält also insgesamt

$$\underline{\underline{x(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) + x_0.}}$$

b) Es gilt

$$\omega^2 = (2\pi\nu)^2 = D/m \;\Rightarrow\; \underline{\underline{D = m(2\pi\nu)^2 = 4\ \mathrm{kN/m}.}}$$

c) Die Eigenfrequenz ω hängt nicht vom Winkel α ab. Die Ruhelage

$$x_0 = \frac{g\sin\alpha}{\omega^2}$$

allerdings schon.

2. Gedämpftes Masse-Feder Pendel (*)

Betrachten Sie ein gedämpftes Masse-Feder Pendel, dass der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + sx = 0$$

genügt, wobei m die Masse sei, r die Dämpfungskonstante und s die Federkonstante. Für $s = r^2/(4m)$ ist die allgemeine Lösung gegeben als

$$x(t) = (C + Dt)\mathrm{e}^{-pt},$$

wobei C und D Konstanten sind.

a) Bestimmen Sie p.

b) Ein Eisenbahnpuffer am Ende des Gleises in einem Kopfbahnhof verhalte sich wie ein solches gedämpftes Masse-Feder Pendel aus Aufgabe a). Die Federkonstante sei gegeben als $s = 11.25$ kN/m und Dämpfungskonstante als $r = 30 \cdot 10^3$ kg/s. Ein Eisenbahnwagon der Masse $m = 20 \cdot 10^3$ kg kollidiere mit diesem Puffer mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 1$ m/s. Überlegen Sie sich die Anfangsbedingungen und bestimmen Sie daraus die Konstanten C und D. Zeigen Sie, dass dieses System kritisch gedämpft ist. Wie weit wird der Puffer maximal zusammengedrückt? Welche Geschwindigkeit besitzt der Wagen nachdem er vom Puffer zurückgestoßen wurde?

Lösung:

a) Da es sich hier offensichtlich um den aperiodischen Grenzfall handelt. wird die gegebene Bewegungsgleichung mit dem Ansatz $x(t) = C\mathrm{e}^{-pt}$ gelöst und führt auf die charakteristische Gleichung für p

$$p^2 - \frac{r}{m}p + \frac{s}{m} = 0$$

mit den Lösungen

$$p_{1,2} = \frac{r}{2m} \pm \sqrt{\frac{r^2}{4m^2} - \frac{s}{m}}.$$

Nur für $s = r^2/(4m)$ (vgl. Angabe) ist $x(t) = (C + Dt)\mathrm{e}^{-pt}$ eine allgemeine Lösung der DGL. Also gilt

$$\underline{\underline{p = r/(2m)}}.$$

Bemerkung: Einsetzen der allgemeinen Lösung in die DGL führt noch zu einem zeitabhängigen p, welches für die Lösung aber irrelevant ist.

b) Das System ist kritisch gedämpft, da $s = r^2/(4m)$, was durch Einsetzen der gegebenen Werte leicht überprüft werden kann. Die gegebene allgemeine Lösung darf also verwendet werden. Mit den sich aus der Situation ergebenden Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ erhält man für die Konstanten $C = 0$ und $D = v_0$. Man erhält somit

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 t\mathrm{e}^{-\frac{r}{2m}t} \\ \dot{x}(t) &= \left(1 - \frac{r}{2m}t\right) v_0\mathrm{e}^{-\frac{r}{2m}t} \\ \ddot{x}(t) &= \left(\frac{r}{2m}t - 2\right) v_0\frac{r}{2m}\mathrm{e}^{-\frac{r}{2m}t}. \end{aligned}$$

Bei maximaler Auslenkung des Puffers ist $\dot{x}(t) = 0$. Somit gilt für $t = 2m/r$

$$\underline{\underline{x(t = 2m/r) = v_0\frac{2m}{r}\mathrm{e}^{-1} = \frac{4}{3\mathrm{e}}\mathrm{m} = 0.49\ \mathrm{m}.}}$$

Da der Puffer am Wagen nun anliegt, kann er beim Zurückschwingen nur beschleunigt und nicht abgebremst werden. Der Wagen rollt mit der maximalen negative Geschwindigkeit weg. Diese Ergibt sich zu dem Zeitpunkt bei dem $\ddot{x}(t) = 0$ ist, also für $t = 4m/r = 8/3$ s. Die Geschwindigkeit beträgt dann

$$\underline{\underline{\dot{x}(t = 4m/r) = -v_0\mathrm{e}^{-2} = -\mathrm{e}^{-2}\ \mathrm{m/s} = -0.14\ \mathrm{m/s}.}}$$

3. Palme im Wind (**)

Eine hohe Palme mit einer 1 Tonne schweren, kompakten Krone bewegt sich im Wind. Für ein Paar Minuten übt ein konstanter Wind eine horizontale Kraft von 1000 N auf die Krone aus. Diese wird dadurch um 4 m zur Seite ausgelenkt. Bei plötzlich eintretender Windstille führt die Krone eine gedämpfte harmonische Schwingung aus. Dabei ist die Maximalamplitude der ersten Schwingung 4 m, die der zweiten 3 m und die der dritten 2.25 m.

a) Bestimmen Sie die Dämpfungskonstante der Schwingung.

b) Welchen Wert hat die Kreisfrequenz der Schwingung?

Lösung:

a) Die Palme wird durch eine Kraft $F = 1000$ N um $x = 4$ m ausgelenkt. Damit ergibt sich die Federkonstante D der Palme zu

$$D = \frac{F}{x} = 250 \text{ N/m}.$$

Für die Kreisfrequenz ω_0 der ungedämpften Schwingung gilt

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 0.5 \text{ Hz}.$$

Mit der Definition des logarithmischen Dekrements findet man einen Zusammenhang zwischen der Dämpfungskonstante γ, der Periodendauer T und den angegeben Maximalamplituden. Es ergibt sich

$$\gamma T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \frac{4}{3}.$$

Aus der Vorlesung ist für den Fall der gedämpften Schwingung

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

bekannt. Für die Periodenlänge gilt somit

$$T = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 + (\gamma T)^2}{\omega_0^2}} = \sqrt{\frac{(2\pi)^2 + (\ln 4/3)^2}{\omega_0^2}} = 12.58 \text{ s}.$$

Für die Dämpfungskonstante erhält man damit

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{\ln 4/3}{T} = 0.023 \text{ s}^{-1}.}}$$

b) Für die Kreisfrequenz folgt dann

$$\underline{\underline{\omega = \frac{2\pi}{T} = 0.499 \text{ Hz.}}}$$

4. Schwingung mit resonantem Antrieb (**)

Die ungedämpfte harmonische Schwingung mit resonantem Antrieb ($\omega_0 = \Omega$)

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) = f_0 \cos(\Omega t)$$

besitzt die partikuläre Lösung

$$x_{\mathrm{p}}(t) = \frac{f_0}{2\Omega} t \sin(\Omega t).$$

a) Zeigen Sie, dass $x_{\mathrm{p}}(t)$ die Schwingungsgleichung löst.

b) Berechnen Sie für diese Lösung die Oszillator-Energie. Diese Energie enthält einen anwachsenden und einen oszillierenden Anteil. Zeigen Sie, dass die Energie quadratisch mit der Zeit anwächst, wenn man die oszillierenden Anteile über eine Periode mittelt.

c) Wie lautet die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung? Konstruieren Sie eine spezielle Lösung für die Anfangsbedingung $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Lösung:

a) Zweimaliges Differenzieren liefert

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{\mathrm{p}}(t) &= \frac{f_0}{2\Omega} \sin(\Omega t) + \frac{f_0}{2} t \cos(\Omega t) \\
\ddot{x}_{\mathrm{p}}(t) &= f_0 \cos(\Omega t) - \frac{f_0 \Omega}{2} t \sin(\Omega t).
\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Schwingungsgleichung erhält man

$$\underline{\underline{\ddot{x}_{\mathrm{p}}(t) + \Omega^2 x_{\mathrm{p}}(t) = f_0 \cos(\Omega t) - \frac{f_0 \Omega}{2} t \sin(\Omega t) + \Omega^2 \frac{f_0}{2\Omega} t \sin(\Omega t) = f_0 \cos(\Omega t).}}$$

$x(t)$ ist also Lösung der Schwingungsgleichung.

b) Die Oszillator-Energie lässt sich schreiben als

$$
\begin{aligned}
E &= E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \\
&= \frac{m}{2}(\dot{x} + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{f_0}{2\Omega}\sin(\Omega t) + \frac{f_0}{2}t\cos(\Omega t)\right)^2 + \omega^2\left(\frac{f_0}{2\Omega}t\sin(\Omega t)\right)^2\right] = \\
&= \frac{mf_0^2}{8\Omega^2}\left(\sin^2(\Omega t) + 2\Omega t\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) + \Omega^2 t^2\sin^2(\Omega t) + \Omega^2 t^2\cos^2(\Omega t)\right) = \\
&= \frac{mf_0^2}{8\Omega^2}\left(\sin^2(\Omega t) + 2\Omega t\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) + \Omega^2 t^2\right).
\end{aligned}
$$

Es ist also ein quadratisches Anwachsen überlagert mit oszillierenden Anteilen. Mittelt man die oszillierenden Anteile über eine Periode T, so erhält man

$$
\int_0^T \mathrm{d}t\, 2t\sin(\Omega t)\cos(\Omega t) = \int_0^T \mathrm{d}t\, t\sin(2\Omega t) = \left[\frac{\sin(2\Omega t)}{4\Omega^2} - \frac{t\cos(2\Omega t)}{2\Omega}\right]_0^T = -\frac{T}{2\Omega}
$$

$$
\int_0^T \mathrm{d}t\, \sin^2(\Omega t) = \frac{T}{2}.
$$

Insgesamt ergibt sich also

$$
\underline{\underline{\overline{E(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\, E(t) = \frac{1}{T}\frac{mf_0^2}{8\Omega^2}\left(\frac{T}{2} - \Omega\frac{T}{2\Omega} + \Omega^2 t^2\right) = \frac{mf_0^2}{8T}t^2.}}
$$

Bemerkung: In obiger Formel wurden nur die oszillierenden Anteile über eine Periode gemittelt.

c) Die Lösung der homogenen DGL lautet bekanntlich $x_{\mathrm{h}}(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. Mit der angegebenen partikulären Lösung lautet die allgemeine Lösung

$$
x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) + \frac{f_0}{2\Omega}t\sin(\Omega t).
$$

Aus den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ folgt $A = 0$ und $B = v_0/\Omega$. Man erhält letztendlich für die spezielle Lösung

$$
\underline{\underline{x(t) = \left(\frac{v_0}{\Omega} + \frac{f_0}{2\Omega}t\right)\sin(\Omega t).}}
$$

5. Baufahrzeug (***)

Beim Anfahren eines Baufahrzeugs führt der Fußboden des Cockpits vertikale Schwingungen mit zunehmender Frequenz aus. Für ein Messgerät mit Masse $m = 100$ g, das hohe Schwingungsfrequenzen nicht verträgt, beträgt die kritische Kreisfrequenz 200 Hz. Das Gerät ist federnd und gedämpft gelagert, wobei die Feder so ausgewählt ist, dass die Eigenkreisfrequenz ω_0 für Messgerät und Feder 10% von ω_{krit} beträgt.

a) Wie groß ist die Federkonstante k der Aufhängung des Messinstruments?

b) Welchen Wert muss die Abklingkonstante γ haben, damit die Schwingungsamplitude A_{m} des Messgerätes bei ω_0 gerade so groß wie die Amplitude ξ_{m} der Erregerschwingung ist?

c) Bei welcher Kreisfrequenz Ω_{m} ist das Amplitudenverhältnis $A_{\mathrm{m}}/\xi_{\mathrm{m}}$ am größten, wenn die Abklingkonstante γ den in b) berechneten Wert hat?

d) Welchen Wert hat $A_{\mathrm{m}}/\xi_{\mathrm{m}}$ bei Ω_{m} und bei ω_{krit}?

Lösung:

a) Da das Messgerät die Frequenz ω_{krit} nicht verträgt, wählt man die Federkonstante so, dass deren Eigenfrequenz ω_0 ganz verschieden ist von der kritischen Frequenz ω_{krit}, laut Angabe also $\omega_0 = 0.1 \cdot \omega_{\mathrm{krit}}$. Es folgt

$$\underline{\underline{k = m\omega_0^2 = \frac{m\omega_{\mathrm{krit}}}{100} = 40 \text{ N/m.}}}$$

b) Wahl der Dämpfungskonstante so, dass bei der Schwingung des Bodens

$$\xi(t) = \xi_{\mathrm{m}} \cos(\Omega t)$$

bei $\Omega = \omega_0$ die Amplitude A_{m} der Schwingung des Messgerätes

$$x(t) = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \varphi)$$

gerade so groß ist wie die Bodenamplitude ξ_{m}. Die Schwingung des Bodens $\xi(t)$ führt zu einer Stauchung und Dehnung der Feder und somit zu einer Kraft auf das Messgerät, welche durch $F(t) = k\xi(t)$ gegeben ist.
Diese kann als äußere Antriebsfrequenz des Feder-Messgerät-Systems angesehen werden. Die DGL des Feder-Messgerät-Systems ist dann durch

$$m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + kx(t) = k\xi(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

bzw.

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 \xi(t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega t) = \omega_0^2 \xi_{\mathrm{m}} \cos(\Omega t)$$

mit $2\gamma = b/m$ und $\omega_0^2 = k/m$ gegeben.

Die Lösung dieser DGL ist laut Vorlesung $x(t) = A_\mathrm{m}\cos(\omega t + \varphi)$ mit

$$A_\mathrm{m} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}.$$

Für das Amplitudenverhältnis folgt somit

$$\frac{A_\mathrm{m}}{\xi_\mathrm{m}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}.$$

Mit der Bedingung aus der Angabe

$$\left.\frac{A_\mathrm{m}}{\xi_\mathrm{m}}\right|_{\omega_0=\Omega} = \frac{\omega_0}{2\gamma} \overset{!}{=} 1$$

erhält man für die Dämpfungskonstante

$$\underline{\underline{\gamma = \frac{\omega_0}{2} = 10\ \mathrm{s}^{-1}.}}$$

c) Die Bestimmung des Maximums des Ausdrucks

$$\frac{A_\mathrm{m}}{\xi_\mathrm{m}}(\Omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

ist aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion äquivalent zur Bestimmung des Minimums von

$$R(\Omega) = (\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2.$$

Man erhält mit $\gamma = \omega_0/2$ aus b)

$$\left.\frac{\mathrm{d}R(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}\right|_{\Omega=\Omega_\mathrm{m}} = 4\Omega_\mathrm{m}(2\gamma^2 - \omega_0^2 - \Omega_\mathrm{m}^2) = 4\Omega_\mathrm{m}\left(\frac{\omega_0^2}{2} - \Omega_\mathrm{m}^2\right) \overset{!}{=} 0.$$

Die relevante Lösung ist $\Omega_\mathrm{m}^2 = \omega_0^2/2$.

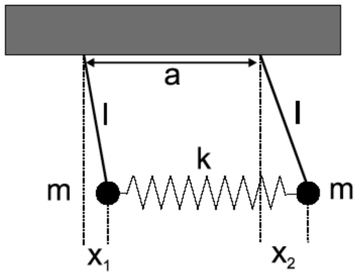
d) Man erhält mit den Ergebnissen aus b) und c) für die Amplitudenverhältnisse

$$\underline{\underline{\frac{A_\mathrm{m}}{\xi_\mathrm{m}}(\Omega = \Omega_\mathrm{m}) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\right)^2 + \left(2\frac{\omega_0^2}{2}\right)^2\frac{\omega_0^2}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.15}}$$

$$\underline{\underline{\frac{A_\mathrm{m}}{\xi_\mathrm{m}}(\Omega = \omega_\mathrm{krit}) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - (10\omega_0)^2\right)^2 + \left(2\frac{\omega_0}{2}\right)^2(10\omega_0)^2}} = \frac{1}{10\sqrt{82}} = 0.01.}}$$

Das Messgerät bleibt also bei der kritischen Frequenz unversehrt.

6. Gekoppelte Fadenpendel (**)



Zwei Fadenpendel der Länge l (Massen m) sind durch eine Feder (Federkonstante k) so miteinander verbunden (siehe Skizze), dass die Feder im ruhenden System nicht ausgelenkt ist.

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen der beiden Pendel. Vernachlässigen Sie hierbei die Reibung.

b) Bestimmen Sie die Kreisfrequenzen der beiden möglichen Normalschwingungen, d.h. der gleichphasigen Schwingung, $x_1(t) = x_2(t)$, sowie der gegenphasigen Schwingung, $x_1(t) = -x_2(t)$.

c) Für eine sehr schwache Kopplung ($k \ll mg/l$) ergeben sich aus der Überlagerung der beiden Normalschwingungen Schwebungen. Berechnen Sie für diesen Fall die Schwebungskreisfrequenz.

Hinweise: $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$, $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$ und $(1+x)^n \simeq 1 + nx$ für $|x| \ll 1$.

Lösung:

a) Die Rückstellkraft der Fadenpendel für kleine Auslenkungen ist gegeben durch

$$F_{\mathrm{r}1,2} = -m\frac{g}{l}x_{1,2}$$

und die Kopplung der Pendel ist gegeben durch

$$F_{\mathrm{k}1,2} = -k(x_{1,2} - x_{2,1}).$$

Damit ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$m\ddot{x}_1 = -m\frac{g}{l}x_1 - k(x_1 - x_2)$$

$$\underline{\underline{m\ddot{x}_2 = -m\frac{g}{l}x_2 - k(x_2 - x_1).}}$$

b) Mit dem Ansatz $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ finden wir für

– die gleichphasige Schwingung $x_1 = x_2$, bei der die Kopplung nicht beansprucht wird

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}x_1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{l}}.}}$$

– die gegenphasige Schwingung $x_1 = -x_2$

$$\ddot{x}_1 = -\left(\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}\right) x_1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\omega_- = \sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}}.}}$$

c) Die allgemeine Lösung ist die Linearkombination der beiden Normalschwingungen

$$x_{1,2}(t) = A_+ \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \pm A_- \cos(\omega_- t + \varphi_-)$$

Der deutlichste Schwebungseffekt tritt für den Spezialfall $A_+ = A_- = A$ auf. Mit den gegebenen Additionstheoremen findet man

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2A\cos\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t + \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right) \\ x_2(t) &= -2A\sin\left(\frac{\omega_+ + \omega_-}{2}t + \frac{\varphi_+ + \varphi_-}{2}\right)\sin\left(\frac{\omega_+ - \omega_-}{2}t + \frac{\varphi_+ - \varphi_-}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Schwebungsfrequenz ist die kleinere der beiden Kreisfrequenzen, also

$$\omega_\mathrm{s} = \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{g}{l} + 2\frac{k}{m}} - \sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Für den Fall schwacher Kopplung erhält man damit in erster Näherung

$$\underline{\underline{\omega_\mathrm{s} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\sqrt{1 + 2\frac{k}{m}\frac{l}{g}} - 1\right) \simeq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(1 + \frac{1}{2}\cdot 2\frac{k}{m}\frac{l}{g} - 1\right) = \frac{1}{2}\frac{k/m}{\sqrt{g/l}}.}}$$

7. Zeitdilatation (*)

Myonen sind Elementarteilchen, welche im Mittel nach $\tau = 2.2$ µs zerfallen. In einem Teilchenbeschleuniger der Länge 3 km hat man Myonen auf fast Lichtgeschwindigkeit beschleunigt.

a) Wenn man klassisch rechnet, welche Strecke legt ein Myon im Mittel während seiner Lebenszeit zurück?

b) Nun möchte man den Myonenstrahl aber gerne über möglichst die gesamte Länge des Beschleunigers schicken, und in der Tat kann man das auch. Erklären Sie diesen Sachverhalt. Welche Strecke kann ein Myon im Mittel zurücklegen, wenn seine Geschwindigkeit 99% der Lichtgeschwindigkeit beträgt?

c) In seinem eigenen Bezugssystem lebt das Myon jedoch nur 2.2 µs. Warum muss das Myon jetzt nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit fliegen?

Lösung:

a) Die maximale Geschwindigkeit des Myons ist $v \approx c$. Klassisch ist die Strecke also

$$\underline{\underline{l = c\tau = 660\ \mathrm{m}}}.$$

b) Die angegebene Lebenszeit ist natürlich die im Bezugssystem des Myons. Die Zeitdilatation lässt diese für einen relativ dazu bewegten Beobachter, wie z. B. einen Versuchsaufbau am Teilchenbeschleuniger, um den Faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.99^2}} = 7.08$$

länger erscheinen. Die innerhalb des Beschleunigers zurücklegbare Strecke ist also

$$\underline{\underline{\gamma \cdot 660\ \mathrm{m} = 4631\ \mathrm{m}}}.$$

c) Das Myon lebt in seinem eigenen Bezugssystem immer noch die Zeit von 2.2 µs. Der Teilchenbeschleuniger erscheint ihm aber entlang der Bewegungsrichtung gestaucht (Längenkontraktion), und zwar um den selben Faktor wie die Lebensdauer im Beschleunigersystem gestreckt ist.

8. Zeitlich und örtlich getrennte Ereignisse (**)

Zeigen sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation:

a) Die zeitliche Reihenfolge von zwei raumartig getrennten Ereignissen (t_1, x_1), (t_2, x_2) hängt vom Bezugssystem ab. Es gibt insbesondere ein Bezugssystem, in dem sie gleichzeitig sind.

b) Die zeitliche Reihenfolge von zeitartig getrennten Ereignissen hängt nicht vom Bezugssystem ab. Es gibt ein Bezugssystem, in welchem sie am gleichen Ort stattfinden.

Hinweis: Verwenden sie $|v| < c$.

Lösung:

a) Ohne Einschränkung wählen wir $\Delta t = t_1 - t_2 > 0$ und $\Delta x = x_1 - x_2 > 0$. Raumartige Trennung bedeutet nun, dass

$$\Delta x > c\Delta t.$$

Der transformierte Zeitunterschied ist

$$\begin{aligned} t'_1 - t'_2 &= \gamma \left(t_1 - t_2 - \frac{v}{c^2}(x_1 - x_2) \right) \\ &= \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right). \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$\Delta t' > 0$$

entspricht damit

$$\underline{\underline{\frac{c\Delta t}{\Delta x} > \frac{v}{c}}}.$$

Da die linke Seite nach Voraussetzung eine Größe zwischen 0 und ausschließlich 1 ist, lässt sich ein v finden, so dass die Ungleichung erfüllt ist. Mit der selben Argumentation zeigt man die anderen zwei Fälle. Für den Fall der Gleichzeitigkeit ist

$$\underline{\underline{v = \frac{c^2 \Delta t}{\Delta x}}}.$$

b) Ohne Einschränkung wählen wir $\Delta t = t_1 - t_2 > 0$ und $\Delta x = x_1 - x_2 > 0$. Zeitartige Trennung bedeutet, dass

$$\Delta x < c\Delta t.$$

Man macht die selben Umformungen wie in der vorherigen Teilaufgabe. Eine Umkehrung der Reihenfolge würde nun bedeuten, dass

$$\Delta t' < 0$$

bzw.

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} < \frac{v}{c}.$$

Da aber nach Voraussetzung

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1$$

gilt die Ungleichung nur für $v/c > 1$, also für keine Geschwindigkeit.

Die Ereignisse werden auf den gleichen Ort abgebildet, wenn

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t) = 0$$

gilt, also

$$\underline{\underline{\frac{v}{c} = \frac{\Delta x}{c\Delta t}}}.$$

Nach Voraussetzung der zeitlichen Trennung existiert eine passende Geschwindigkeit v.

9. Anruf von Erde (***)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ startet von der Erde (Bezugssystem S, Ort $x = 0$) ein Raumschiff (Bezugssystem S', Ort $x' = 0$) mit der der Geschwindigkeit v in x-Richtung. Die Erde funkt zum Zeitpunkt $\tau = 1$ d die Nachricht 'Alles klar?'. Das Raumschiff hat einen Empfänger für dieses Signal dabei.

a) Zeigen Sie: Wenn der Funkspruch empfangen wird, hat das Raumschiff bezüglich S den Ort $x = \frac{v\tau}{1-v/c}$ und die Uhr von S zeigt die Zeit $t = \frac{\tau}{1-v/c}$.

b) Benutzen Sie das Ergebnis von a) um die Ankunftszeit des Funkspruches bezüglich S' zu berechnen.

Lösung:

a) Dies kann man einfach mit der Bewegung lösen: Im System S hat das Raumschiff den Ort

$$x = vt.$$

Damit der Funkspruch auf den Empfänger trifft, muss gelten, dass

$$x = ct - c\tau.$$

Setzt man die beiden Ausdrücke gleich und löst nach t auf erhält man

$$\underline{\underline{t = \frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} = \frac{5}{2} \text{ d}}}$$

bzw. mit der ersten Gleichung

$$\underline{\underline{x = \frac{v\tau}{1 - \frac{v}{c}} = 3888 \cdot 10^{10} \text{ m.}}}$$

b) Die Ankunftszeit t' ist gemäß der Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \\ &= \gamma \left(\frac{\tau}{1 - \frac{v}{c}} - \frac{v^2 \tau}{c^2 \left(1 - \frac{v}{c}\right)} \right) \\ &= \gamma\tau \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c}} \\ &= \gamma\tau \left(1 + \frac{v}{c}\right) = \frac{5}{4}\frac{8}{5}\tau = \underline{\underline{2\tau = 2 \text{ d}}}. \end{aligned}$$

10. Erde, Rakete, Meteor (*)

Die Erde, eine bemannte Rakete und ein Meteor bewegen sich zufällig in die gleiche Richtung. An der Erde fliegt die Rakete mit einer von der Erde beobachteten Geschwindigkeit von $v_{\mathrm{E,R}} = \frac{3}{4}c$ vorbei. An der Rakete fliegt der Meteor mit einer von der Raketenmannschaft beobachteten Geschwindigkeit von $v_{\mathrm{R,M}} = \frac{1}{2}c$ vorbei.

a) Welche Geschwindigkeit hat der Meteor von der Erde aus beobachtet?

b) Zeichnen Sie ein Minkowski-Diagramm für diese Situation aus der Sicht der Raketenbesatzung.

Lösung:

a) Die Geschwindigkeiten $v_{\mathrm{E,R}}$ und $v_{\mathrm{R,M}}$ müssen (relativistisch) addiert werden, da die jeweiligen Beobachter positive Geschwindigkeiten sehen, also

$$v_{\mathrm{E,M}} = \frac{v_{\mathrm{E,R}} + v_{\mathrm{R,M}}}{1 + \frac{v_{\mathrm{E,R}} v_{\mathrm{R,M}}}{c^2}} = \underline{\underline{\frac{10}{11}c}}.$$

b) Die Winkel im Minkowski-Diagramm ergeben sich zu

$$\alpha_M = \arctan\left(\frac{v_{\mathrm{M}}}{c}\right) \approx 26.6° \text{ und } \alpha_E = \arctan\left(\frac{v_{\mathrm{E}}}{c}\right) \approx 36.9°.$$

Da v für den Meteor positiv und für die Erde negativ ist, bewegen sich die Achsen auf die Winkelhalbierende zu, bzw. von ihr weg.