Ferienkurs Experimentalphysik 1
2011

Übung 3 - Musterlösung

1. Katapult (*)

Ein menschliches Haar habe ein Elastizitätsmodul $E = 5 \cdot 10^8$ N/m^2 . Nehmen Sie an, dass sich das Haar elastisch verhält, bis es für Dehnungen größer als 10% beschädigt wird. Berechnen Sie das Volumen an Haar, das Archimedes 250 v.C. für ein Katapult benötigte, um einen Fels von 50 kg auf eine Geschwindigkeit von 20 m/s zu beschleunigen.

Lösung:

Mit dem Hookeschen Gesetz aus der Vorlesung erhält man die übliche Federkraft

$$\frac{F}{A} = \sigma = E\epsilon = E\frac{\Delta l}{l} \Rightarrow F = \underbrace{\frac{EA}{l}}_{=k}\underbrace{\Delta l}_{=x}$$

mit der Federkonstanten k. Nun lässt sich die Energieerhaltung anwenden

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 = E_{\text{spann}} = \frac{k}{2}x^2 = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}(\Delta l)^2 = \frac{1}{2}EV\left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2 = \frac{1}{2}EV\epsilon^2.$$

Somit erhält man für das Volumen an Haar mit $\epsilon = 10\%$

$$\underline{\underline{V = \frac{mv^2}{E\epsilon^2} = 4 \cdot 10^{-3}\ \text{m}^3.}}$$

2. Schwimmender Quader (**)

Betrachten Sie einen schwimmenden Körper in Form eines flachen Quaders mit Höhe c und quadratischer Grundfläche der Kantenlänge a, der aus einem Material homogener Dichte besteht.

a) Zeigen Sie, dass sich die untergetauchte Höhe zur Gesamthöhe des Quaders so verhält, wie die Dichte seines Materials zur Dichte von Wasser.

b) Der schwimmende Körper befinde sich nun in einem Wasserbecken der Fläche A mit der Wassertiefe h_0. Zeigen Sie, dass die Eintauchtiefe im Gleichgewicht die potentielle Energie des Gesamtsystems aus Körper und Wasser minimiert.

Lösung:

a) Nach dem Auftriebsgesetz taucht der Körper so weit ein, bis das Gewicht des verdrängten Wassers seinem eigenen Gewicht gleicht. Für die Eintauchtiefe h_- gilt also

$$\rho_W a^2 h_- = \rho_Q a^2 c$$

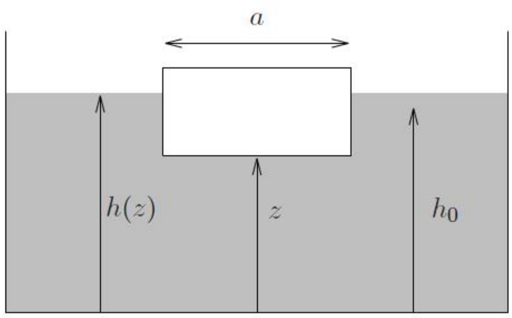
und somit

$$\underline{\underline{\frac{h_-}{c} = \frac{\rho_Q}{\rho_W}}}.$$

b) Die Höhe der Unterseite des Quaders über dem Beckenboden sei z. Dann ist die Höhe des Wasserspiegels im Becken als Funktion von $z \leq h_0$ gegeben durch die Bedingung, dass das Gesamtvolumen des Wassers im Becken konstant, d.h. unabhängig von z ist

$$a^2 z + (A - a^2) h(z) = A h_0.$$

Also gilt



$$h(z) = \frac{A h_0 - a^2 z}{A - a^2}.$$

Die potentielle Energie des Quaders als Funktion von z ist gegeben durch die Höhe seines Schwerpunkts

$$V_Q(z) = \rho_Q a^2 c g \left(z + \frac{c}{2}\right).$$

Die potentielle Energie des Wassers setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: Das Wasser unterhalb des Quaders und das Wasser im Rest des Beckens

$$V_\mathrm{W}(z) = \frac{1}{2} g \rho_\mathrm{W} a^2 z^2 + \frac{1}{2} g \rho_\mathrm{W} (A - a^2) h^2(z).$$

Die gesamte potentielle Energie von Quader und Wasser ist also

$$V(z) = \frac{1}{2} g \rho_\mathrm{W} a^2 z^2 + \frac{1}{2} g \rho_\mathrm{W} \frac{(A h_0 - a^2 z)^2}{A - a^2} + \rho_\mathrm{Q} a^2 c g \left(z + \frac{c}{2} \right).$$

Die Ableitung nach z ergibt

$$\frac{\mathrm{d}V(z)}{\mathrm{d}z} = g \rho_\mathrm{W} a^2 z - g \rho_\mathrm{W} a^2 \frac{A h_0 - a^2 z}{A - a^2} + g \rho_\mathrm{Q} a^2 c \overset{!}{=} 0.$$

In dem Bruch erkennt man die Höhe des Wasserspiegels $h(z)$ wieder, also folgt nach Division durch $g \rho_W a^2$

$$h(z) - z = \frac{\rho_\mathrm{Q}}{\rho_\mathrm{W}} c.$$

Die Eintauchtiefe $h_-(z) = h(z) - z$ zu minimaler Gesamtenergie ist also genau durch die in a) gefundene Gleichung

$$\underline{\underline{\frac{h_-}{c} = \frac{\rho_\mathrm{Q}}{\rho_\mathrm{W}}}}$$

gegeben, also durch das Auftriebsgesetz.

3. Oberflächenspannung (**)

Zwei Glasplatten werden in einem Abstand $d = 0.1$ mm zueinander justiert und anschließend mit einer offenen Seite in Wasser getaucht. Wie hoch steigt das Wasser, wenn Sie davon ausgehen, dass Wasser eine Oberflächenspannung von $\Delta\sigma = 72.75 \cdot 10^{-3}$ J/m^2 ($\Delta\sigma = \sigma_\text{Luft-Wand} - \sigma_\text{Wasser-Wand}$) besitzt und außerdem Randeffekte vernachlässigen?

Lösung:
Lösung über Minimierung der Gesamtenergie des Systems als Funktion der Steighöhe h

$$V_\mathrm{W}(h) = \frac{1}{2} m g h = \frac{1}{2} \rho g d l h^2$$

(l ist die „Tiefe" der Platten) und

$$V_\mathrm{O}(h) = -2\Delta\sigma \cdot hl.$$

Das negative Vorzeichen kommt daher, dass Energie frei wird, wenn das Wasser höher steigt und eine größere Oberfläche benetzt, also nimmt V_O für größere h ab. Insgesamt gilt

$$V(h) = \frac{1}{2}\rho g d l h^2 - 2\Delta\sigma \cdot hl$$

und somit

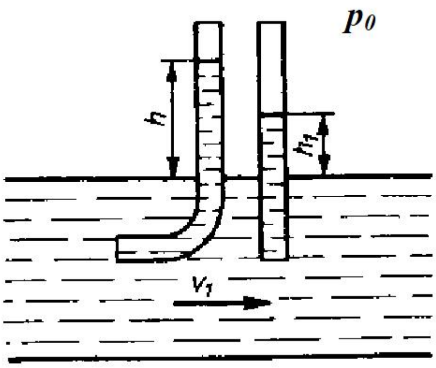
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}h} = \rho g d l h - 2\Delta\sigma \cdot l \stackrel{!}{=} 0.$$

Dies führt auf die Steighöhe, die die Gesamtenergie minimiert

$$\underline{\underline{h = \frac{2\Delta\sigma}{\rho g d} \approx 14.8 \text{ cm.}}}$$

4. Dynamischer Druck (*)

Zur Messung des dynamischen Drucks wird ein rechtwinklig gebogenes und ein gerades Rohr in strömendes Wasser getaucht (s. Abbildung).



a) Wie hoch steigt die Flüssigkeit in diesem gekrümmten Rohr auf, wenn sie in einem an gleicher Stelle eingetauchten geraden Rohr eine Steighöhe $h_1 = 10$ cm erreicht und wenn die Strömungsgeschwindigkeit an der gegebenen Stelle gleich $v_1 = 1.4$ m/s ist? Wie groß ist demnach der dynamische Druck im Wasser?

b) Geben Sie den statischen und den Gesamtdruck im Wasser an, wenn der Umgebungsdruck $p_0 = 1013$ mbar ist.

Lösung:

a) Mit der Bernoulli Gleichung gilt für das gekrümmte Rohr

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h + p_0.$$

Im geraden Rohr gilt

$$p_1 = \rho g h + p_0.$$

Subtrahiert man die beiden Gleichungen voneinander, so kann man die gesuchte Höhe h berechnen

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g(h - h_1) \;\Rightarrow\; h = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = 20.0 \text{ cm}$$

Der Dynamische Druck ist

$$\underline{\underline{p_{\text{dyn}} = \frac{1}{2}\rho v_1^2 = 980 \text{ Pa.}}}$$

b) Der statische Druck ist

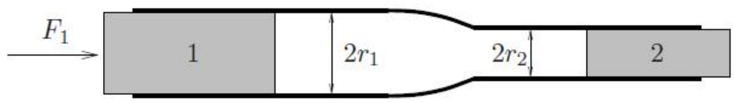
$$\underline{\underline{p_{\text{stat}} = \rho g h_1 + p_0 = 1.023 \cdot 10^5 \text{ Pa.}}}$$

Der Gesamtdruck

$$\underline{\underline{p_{\text{ges}} = p_{\text{stat}} + p_{\text{dyn}} = 1.033 \cdot 10^5 \text{ Pa.}}}$$

5. Wasserführendes Rohr (*)

Betrachten Sie ein gerades wasserführendes Rohr, das sich vom Radius r_1 auf den Radius r_2 verengt und auf beiden Seiten mit beweglichen Kolben verschlossen ist (s. Abbildung). Auf den linken Kolben wird zusätzlich zum Atmosphärendruck p_0 die Kraft F_1 ausgeübt, auf den rechten Kolben wirkt von außen nur der Atmosphärendruck. Das System befinde sich in einem stationären Zustand. Betrachten Sie das Wasser als inkompressibel und reibungsfrei.



Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der beiden Kolben?
Mit welcher Kraft F_2 wird der rechte Kolben aus dem Rohr herausgedrückt?
Wie groß ist der Druck im Wasser vor der Verengung (p_1) und nach der Verengung (p_2)?
Was geschieht im Fall $r_1 = r_2$?

Lösung:

Für die stationäre Strömung gelten die Kontinuitätsgleichung

$$v_1 A_1 = v_2 A_2$$

mit den Querschnittflächen $A_1 = \pi r_1^2$ und $A_2 = \pi r_2^2$, sowie die Bernoulli-Gleichung

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Da das System stationär sein soll, muss an beiden Kolben Kräftegleichgewicht herrschen, d.h.

$$\underline{\underline{p_1 = p_0 + \frac{F_1}{A_1} \quad \text{und} \quad p_2 = p_0.}}$$

Von innen wirkt auf beide Kolben tatsächlich nur der jeweilige statische Druck des Wassers, da an der Berührungsfläche Wasser-Kolben das Wasser relativ zum Kolben ruht. Damit kann man nun das System aus Kontinuitätsgleichung und Bernoulli-Gleichung nach den Geschwindigkeiten auflösen. Es ergibt sich

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \frac{A_2^2}{A_2^2 - A_1^2}(p_2 - p_1) = \frac{A_2^2}{A_1^2 - A_2^2}\frac{F_1}{A_1}.$$

Also gilt

$$\underline{\underline{v_1 = \frac{A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}\sqrt{\frac{2F_1}{\rho A_1}} \quad \text{und} \quad v_2 = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}}\sqrt{\frac{2F_2}{\rho A_1}}.}}$$

Beide Ausdrücke sind reell für $A_2 < A_1$.

Die Drücke p_1 und p_2 sind bereits oben bestimmt worden. Die Kraft mit der der rechte Kolben herausgedrückt wird, ist

$$\underline{\underline{F_2 = A_2 p_2 = A_2 p_0.}}$$

Für $r_1 = r_2$, also $A_1 = A_2$ werden die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 für ein nicht verschwindendes F_1 singulär. Das bedeutet, dass sich kein stationärer Zustand einstellen wird, was physikalisch recht plausibel ist.

6. Trichter (**)

Aus einem bis zur Höhe H mit Wasser gefüllten Trichter mit dem vollen Öffnungswinkel $\alpha = 60°$ strömt Wasser durch ein waagerechtes Rohr mit Innendurchmesser d und Länge L in ein Vorratsgefäß.

a) Wie sieht die Höhe $H(t)$ des Wasserspiegels im Trichter als Funktion der Zeit aus?

b) Wie ist die Wasserdurchflussmenge $M(t)$?

c) Nach welcher Zeit T ist alles Wasser ausgeflossen, wenn $H = 30$ cm, $d = 0.5$ cm und $L = 20$ cm ist? Die Zähigkeit beträgt $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ Pas, die Dichte $\rho = 1000$ kg/m^3.

d) Wie ändert sich die Füllzeit für ein 4-Liter Gefäß, wenn man den Trichter mit $V = 4$ l durch Nachgießen immer voll hält?

Lösung:

Der Trichter sei bis zur Höhe H gefüllt, sodass der Radius R der kreisförmigen Wasseroberfläche $R = H\tan(\alpha/2)$ ist. Das Wasservolumen ist dann

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi H^3 \tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{9}\pi H^3.$$

a) Die Abnahme des Wasservolumens pro Zeiteinheit ist

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}\pi H^2 \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}.$$

Andererseits gilt nach Hagen-Poiseuille

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta p,$$

wobei $\Delta p = \rho g H$ ist. Also gilt

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\underbrace{\frac{3}{8}\frac{r^4\rho g}{\eta L}}_{=:a}\frac{1}{H} \;\Rightarrow\; H\mathrm{d}H = -a\mathrm{d}t$$

mit $a \approx 7.2 \cdot 10^{-4}$ m^{2}s^2. Integration liefert

$$H^2 - H_0^2 = -2at \quad \text{mit} \quad H_0 = H(t=0).$$

Daraus folgt für die Höhe des Wasserspiegels $H(t) = \sqrt{H_0^2 - 2at}$.

b) Die Wasserdurchflussmenge ist über $\mathrm{d}M/\mathrm{d}t = \rho \mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ mit dem Volumenstrom verbunden. Er ergibt sich also aus Integration der Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{3}\pi a H \rho = -\frac{1}{3}\pi a \rho\sqrt{H_0^2 - 2at}$$

die Wasserdurchflussmenge

$$\underline{\underline{M(t) = \frac{1}{9}\pi\rho(H_0^2 - 2at)^{3/2}.}}$$

c) Die Zeit bis alles Wasser ausgeflossen ist (d.h. $H = 0$) ist $T = H_0^2/(2a)$. Mit $H_0 = 0.3$ m, $r = 2.5 \cdot 10^{-3}$ m, $L = 0.2$ m, $\eta = 1.0 \cdot 10^{-3}$ Pas ist $T = 62.6$ s.

d) Für eine Füllmenge von 4 l wird $H_0 = (9V/\pi)^{1/3} = 0.225$ m. Ohne Nachfüllen des Trichters und mit $a = 7.2 \cdot 10^{-4}$ m^2/s^2 ist dann die Füllzeit $T = 35$ s. Mit Nachfüllen gilt $H = H_0 = \text{const}$. Die Menge, die in der Zeit t in das 4-Liter-Gefäß fließt ist dann

$$V = \frac{1}{3}\pi a H_0 t$$

und daraus $t = 23.6$ s.

7. Fass mit Glyzerin (**)

Ein Fass (Durchmesser $d = 1$ m) ist mit Glyzerin ($\rho_{\text{Gl}} = 1.26 \cdot 10^3$ kg/m^3) bis zum oberen Rand gefüllt. Auf Höhe des Fassbodens ragt ein horizontales Rohr der Länge $L = 70$ cm mit Innendurchmesser $d_{\text{Rohr}} = 1$ cm.

a) Zu Beginn sei das Rohr verschlossen. Zur Bestimmung der Viskosität η des Glyzerins wird die Gleichgewichts-Sinkgeschwindigkeit einer Stahlkugel mit $v = 9$ cm/s gemessen (Radius $r_{\text{Kugel}} = 6$ mm, Dichte $\rho_{\text{Kugel}} = 7.8 \cdot 10^3$ kg/m^3). Berechnen Sie η.

b) Nach dem Öffnen des Rohrs werde der Pegel des Glyzerins durch ständiges Zufüllen von $I = 3.7$ cm^3/s (Flüssigkeitsstrom) konstant gehalten. Berechnen Sie unter Annahme laminarer Strömung im Rohr die Höhe h des Fasses.

c) Wie groß ist die mittlere Glyzeringeschwindigkeit im Rohr?

d) Die Zufuhr von Glyzerin werde gestoppt. Nach welche Zeit ist das Fass halb leer?

Lösung:

a) Bei Stokesscher Reibung ist das Kräftegleichgewicht gegeben durch

$$(\rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Gl}})V_{\text{Kugel}}g = 6\pi\eta r_{\text{Kugel}}v.$$

Damit ist die Viskosität η von Glyzerin

$$\underline{\underline{\eta = \frac{2r_{\text{Kugel}}^2 g}{9v}(\rho_{\text{Kugel}} - \rho_{\text{Gl}}) = 0.357 \text{ kgm}^{-1}\text{s}^{-1}}}$$

b) Der Strom im Rohr wird durch das Hagen-Poiseullische Gesetz beschrieben

$$\Delta p = \frac{8\eta L}{\pi r^4}\dot{V} = \frac{8\eta L}{\pi r^4}I$$

Der Druckunterschied ist durch $\Delta p = \rho_{\text{Gl}} g h$ gegeben.

Die Höhe h des Fasses beträgt also

$$\underline{\underline{h = \frac{8\eta L}{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4} I = 0.304 \text{ m.}}}$$

c) Die mittlere Glyzeringeschwindigkeit im Rohr ist

$$\underline{\underline{\bar{v} = \frac{I}{A} = \frac{I}{\pi r^2} = 4.71 \text{ cm/s.}}}$$

d) Der Flüssigkeitsstrom im Rohr wird beschrieben durch

$$I(t) = \frac{h(t)\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^2}{8\eta L}.$$

Dieser muss gleich dem Flüssigkeitsstrom im Fass sein $I_{\mathrm{Rohr}} = I_{\mathrm{Fass}} = -\mathrm{d}h/\mathrm{d}t A_{\mathrm{Fass}}$. Daraus ergibt sich eine DGL für die Höhe h des Flüssigkeitsspiegels

$$\dot{h}(t) = -\frac{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4}{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L} h(t).$$

Ihre Lösung ist

$$h(t) = h_0 \exp\left(-\frac{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4}{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L} \cdot t\right),$$

wobei $h_0 = h(0) = 0.304$ m ist. Das Fass ist also halbleer wenn gilt

$$\frac{h_0}{2} = h_0 \exp\left(-\frac{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4}{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L} \cdot T_{1/2}\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{T_{1/2} = \ln 2 \cdot \frac{8 A_{\mathrm{Fass}} \eta L}{\rho_{\mathrm{Gl}} g \pi r^4} = 44781 \text{ s.}}}$$

8. Tiefenmesser (**)

Als einfaches Tiefenmessgerät stelle man sich einen Glaszylinder der Länge $l_0 = 50$ cm mit einer aufgebrachten Skala vor der oben abgeschlossen ist und unten offen. Taucht man den Zylinder mit der offenen Seite nach unten senkrecht ins Wasser (Dichte von Wasser: $\varrho_{\mathrm{W}} = 1000 \text{ kgm}^{-3}$), so lässt sich am Wasserpegel im Zylinder die Tauchtiefe ablesen.

a) Wie groß ist der durch das Wasser verursachte Druck in 5 m Tiefe?

b) Wie weit ist in dieser Tiefe Wasser in den Kolben gedrückt?
Hinweis: Verwenden Sie die Kompressibilität κ (Kompressibilität von Luft: $\kappa_{\mathrm{L}} = 0.99 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}^{-1}$)

c) In welcher Tiefe war der Taucher, wenn er bemerkt, dass sich der Wasserpegel im

Zylinder um 1 mm ändert, wenn er 1 m tiefer taucht?

Lösung:

a) Der Druck in 5 m Tiefe (ohne Umgebungsdruck) wird durch die Gewichtskraft des darüber liegenden Wassers verursacht. Er ist also gegeben durch

$$p(z) = \frac{F_\mathrm{g}}{A} = \frac{\varrho_\mathrm{W} A z g}{A} = \varrho_\mathrm{W} g z$$

Für eine Tiefe von 5 m erhält man somit einen Druck von

$$\underline{\underline{p(z = 5\ \mathrm{m}) = 49.05\ \mathrm{kPa}.}}$$

b) Durch den äußeren Druck des Wassers wird die Luft in dem Glaszylinder komprimiert (Der Umgebungsdruck spielt keine Rolle, da dieser gerade dem Luftdruck im Zylinder entspricht). Mit Hilfe der Kompressibilität

$$\kappa_\mathrm{L} = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$$

erhält man die separierbare DGL

$$-\kappa_\mathrm{L}\mathrm{d}p = \frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{\mathrm{d}l}{l}$$

mit der Lösung

$$\int\limits_{l_0}^{l} \frac{\mathrm{d}l'}{l'} = -\kappa_\mathrm{L}\int\limits_{0}^{p} \mathrm{d}p' \;\Rightarrow\; \ln\frac{l}{l_0} = -\kappa_\mathrm{L} p \;\Rightarrow\; l(p) = l_0 \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} p}.$$

Diese Funktion gibt an, welche Strecke in dem Zylinder noch mit Luft gefüllt ist. Der Wasserpegel $s(p)$ ist dann durch

$$s(p) = l_0 - l(p) = l_0(1 - \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} p})$$

gegeben. Mit dem in a) berechneten Wert erhält man für die Steighöhe

$$\underline{\underline{s(p = 49.05\ \mathrm{kPa}) = 19.2\ \mathrm{cm}.}}$$

c) Die in b) verwendete Funktion für die Steighöhe des Wassers in dem Glaszylinder kann man mit a) auch von der Tauchtiefe z abhängig machen. Man erhält

$$s(z) = l_0(1 - \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L}\varrho_\mathrm{W} g z}).$$

Mit $\Delta s = s(z_2) - s(z_1) = 1$ mm und $\Delta z = z_2 - z_1 = 1$ m gilt außerdem

$$\Delta s = l_0 (\mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} \varrho_\mathrm{W} g z_1} - \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} \varrho_\mathrm{W} g z_2}).$$

Multiplizieren mit $\mathrm{e}^{\kappa_\mathrm{W} \varrho g z_1}$ und auflösen nach z_1 führt auf

$$\underline{\underline{z_1 = \frac{1}{\kappa_\mathrm{L} \varrho_\mathrm{W} g} \ln \left[\frac{l_0}{\Delta s} \left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa_\mathrm{L} \varrho_\mathrm{W} g \Delta z}\right) \right] = 39.5 \text{ m.}}}$$

9. Ballon (*)

Ein Heißluftballon mit Volumen $V_0 = 3000 \text{ m}^3$ befindet sich auf der Erdoberfläche (Druck $p_0 = 1000$ hPa, Dichte $\varrho_0 = 1.293 \text{ kgm}^{-3}$, Temperatur $T = 0$ °C überall konstant).

a) Berechnen Sie den Luftdruck und die Luftdichte in 600 m Höhe.

b) Berechnen Sie die Auftriebskraft des Ballons auf der Erdoberfläche und in 600 m Höhe.

c) Welche Masse dürfen Ballonhülle, -korb und die Last zusammen höchstens haben um auf eine Höhe von 600 m zu gelangen?

Lösung:

a) Mit Hilfe der barometrischen Höhenformel aus der Vorlesung

$$p(z) = p_0 \mathrm{e}^{-g z \varrho_0 / p_0}$$

erhält man für den Luftdruck in 600 m Höhe

$$\underline{\underline{p(z = 600 \text{ m}) = 926.72 \text{ hPa.}}}$$

Die Dichte der Luft erhält man auch aus der barometrischen Höhenformel. Wegen $p/\varrho = p_0/\varrho_0 = \text{const.}$ folgt

$$\varrho(z) = \varrho_0 \mathrm{e}^{-g z \varrho_0 / p_0}.$$

Für die Luftdichte in 600 m Höhe erhält man damit

$$\underline{\underline{\varrho(z = 600 \text{ m}) = 1.198 \text{ kgm}^{-3}.}}$$

b) Die Auftriebskraft entspricht der durch den Ballon verdrängten Luftmasse. Am Boden ergibt sich also

$$\underline{\underline{F_\mathrm{A}(z = 0 \text{ m}) = \varrho_0 V_0 g = 38.1 \text{ kN}}}$$

und in einer Höhe von 600 m

$$\underline{\underline{F_\mathrm{A}(z = 600\ \mathrm{m}) = \varrho(z = 600\ \mathrm{m})V_0 g = 35.3\ \mathrm{kN}}}.$$

c) Wenn der Ballon gerade noch auf eine Höhe von 600 m aufsteigen soll, müssen sich Auftriebs- und Gewichtskraft in dieser Höhe gerade kompensieren. Die maximale Last ist dann gegeben durch

$$\underline{\underline{m_\mathrm{max} = \frac{F_\mathrm{A}(z = 600\ \mathrm{m})}{g} = \varrho(z = 600\ \mathrm{m})V_0 = 3.6\ \mathrm{t}}}.$$

10. Energie eines Gases (*)

Ein Raum des Volumens 40 m^3 enthalte ein Gas mit dem Druck $p = 1000$ hPa.

a) Berechnen Sie die gesamte translatorische kinetische Energie aller Gasmoleküle, die sich in diesem Raum befinden.

b) Nehmen Sie an, das Gas in diesem Raum sei bei einer hohen Temperatur und bestehe vollständig aus zweiatomigen Molekülen für die alle Freiheitsgrade angeregt sind. Berechnen Sie die zusätzliche Rotations- und Vibrationsenergie des Gases.

Lösung:

a) Die translatorische kinetische Energie eines Gases (egal aus wievielen Atomen die Moleküle bestehen) ist nach der idealen Gasgleichung $pV = Nk_\mathrm{B}T$

$$\underline{\underline{E_\mathrm{trans} = N \cdot \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T = \frac{3}{2}pV = 6.0\ \mathrm{MJ}}}.$$

b) Die Gesamtenergie der Gasmoleküle ist

$$E = N \cdot \frac{f}{2}k_\mathrm{B}T = \frac{f}{2}pV.$$

Nun gibt es bei einem mehratomigen Molekül drei Translations- und drei Rotationsfreiheitsgraden. Bei einem zweiatomigen Molekül kommt noch ein Vibrationsfreiheitsgrad hinzu (Schwingung der Atomkerne entlang ihrer Verbindungsachse), d.h. $f = 3 + 3 + 1 = 7$. Die Energie der Rotations- und Vibrationsbewegungen ist demnach

$$\underline{\underline{E_\mathrm{rot/vib} = \frac{4}{2}pV = 8.0\ \mathrm{MJ}}}.$$

11. Stickstoffmoleküle (*)

a) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit eines Stickstoffmoleküls in einem Gas bei $T = 25°\text{C}$ mithilfe der Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung.

b) Wie groß ist die Anzahl N der Stickstoffmoleküle in einem Volumen von 1 m^3 bei einem Druck von 1000 hPa und welcher Stoffmenge entspricht das?

Lösung:

a) Die Stickstoffatome im N_2-Molekül bestehen aus 14 Nukleonen. Die Masse des Stickstoffmoleküls ist somit durch $m = 2 \cdot 14$ u gegeben. Aus der Vorlesung erhalten wir die Formel für die mittlere Geschwindigkeit

$$\underline{\underline{\overline{v} = \sqrt{\frac{8k_\mathrm{B}T}{\pi m}} = 474.82 \text{ m/s.}}}$$

b) Aus der idealen Gasgleichung

$$pV = Nk_\mathrm{B}T$$

erhält man für die Anzahl der Stickstoffmoleküle

$$\underline{\underline{N = \frac{pV}{k_\mathrm{B}T} = 2.43 \cdot 10^{25}.}}$$

Dies entspricht einer Stoffmenge von

$$\underline{\underline{n = \frac{N}{N_\mathrm{A}} = 40.34 \text{ mol} \approx \frac{V}{V_\mathrm{mol}}.}}$$

Da hier nicht mit Standardbedingungen gerechnet wurde, erhält man für die Rechnung mit dem molaren Volumen einen 'leicht' abweichenden Wert.

12. Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung (**)

Im thermischen Gleichgewicht ist die Geschwindigkeitsverteilung durch die Maxwell-Boltzmann-Verteilung gegeben.

a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichste Geschwindigkeit der Verteilung.

b) Bestimmen Sie das mittlere Geschwindigkeitsquadrat.

Hinweis: Die Tatsache, dass $x^n \mathrm{e}^{-ax} = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\right)^n \mathrm{e}^{-ax}$ ist, könnte nützlich sein.

Lösung:

a) Die wahrscheinlichste Geschwindigkeit v_w tritt am Maximum der Verteilung auf. Für das Maximum gilt

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v}\right|_{v=v_\mathrm{w}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left[\underbrace{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2}}_{=:C} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right)\right]\Bigg|_{v=v_\mathrm{w}} =$$

$$= C\left[2v_\mathrm{w}\exp\left(-\frac{mv_\mathrm{w}^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right) - v_\mathrm{w}^2\frac{mv_\mathrm{w}}{k_\mathrm{B}T}\exp\left(-\frac{mv_\mathrm{w}^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right)\right] =$$

$$= 2Cv_\mathrm{w}\exp\left(-\frac{mv_\mathrm{w}^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right)\underbrace{\left(1 - v_\mathrm{w}^2\frac{m}{2k_\mathrm{B}T}\right)}_{\overset{!}{=}0} \overset{!}{=} 0.$$

Somit folgt ($v_\mathrm{w} = 0$ kann man ausschließen)

$$\underline{\underline{v_\mathrm{w} = \sqrt{\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}}.}}$$

b) Das mittlere Geschwindigkeitsquadrat erhält man aus

$$\overline{v^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^2 f(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2}\int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^4\exp\left(-\frac{mv^2/2}{k_\mathrm{B}T}\right).$$

Für die Auswertung des Integrals erhält man mit dem Hinweis und $a = m/(2k_\mathrm{B}T)$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}v\, v^4 \mathrm{e}^{-av^2} = \int_0^\infty \mathrm{d}v\,\frac{\partial^2}{\partial a^2}\mathrm{e}^{-av^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\int_0^\infty \mathrm{d}v\,\mathrm{e}^{-av^2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\right) = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{a^5}},$$

wobei man sich das Integral über die Gaußglocke

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

merken sollte (für die Herleitung cf. Analysis). Wir erhalten also letztendlich

$$\underline{\underline{\overline{v^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_\mathrm{B}T}\right)^{3/2}\frac{3\sqrt{\pi}}{8}\left(\frac{2k_\mathrm{B}T}{m}\right)^{5/2} = 3\frac{k_\mathrm{B}T}{m}.}}$$