Ferienkurs Experimentalphysik 1
2011

Übung 2 - Lösungsvorschlag

1. Elastischer Stoß

a) Ein Teilchen der Masse m_1 stößt zentral und elastisch mit einem im Laborsystem ruhenden Teilchen der Masse m_2. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktsystems gegenüber dem Laborsystem?
Lösung:
Die Position des Schwerpunkts ist gegeben durch

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Ableiten nach der Zeit liefert die Geschwindigkeit des Schwerpunktes

$$V = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Da im betrachteten Fall $v_2 = 0$ gilt vereinfacht sich das zu

$$V = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

b) Berechne die Geschwindigkeit des Teilchen mit Masse m_2 im Laborsystem nach dem Stoß in Abhängigkeit der Schwerpunktsgeschwindigkeit aus a). Hinweis: Im Schwerpunktsystem wechselt bei elastischem Stoß einfach das Vorzeichen der Geschwindigkeiten der Teilchen.
Lösung:
Wir folgen dem Hinweis und transformieren ins Schwerpunktsystem. Die Geschwindigkeit von m_2 im SPS vor dem Stoß ist somit

$$w_2 = v_2 - V = -V$$

Nun wechseln gemäß Hinweis die Geschwindigkeiten beim Stoß lediglich ihr Vorzeichen, es gilt also

$$w_2' = -w_2 = V$$

Diese Geschwindigkeit können wir nun wieder zurück ins Laborsystem transformieren

$$v_2' = w_2' + V = 2V = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$$

Dies ist nun die gesuchte Geschwindigkeit von m_2 nach dem Stoß im Laborsystem.

c) Wievel Energie wird bei dem Stoß übertragen? Drücke diese Energie in Abhängigkeit der Anfangsenergie von m_1 aus.
Lösung:
Da sich das Teilchen mit Masse m_2 anfangs in Ruhe befindet, wird genau so viel Energie übertragen, wie m_2 nach dem Stoß an kinetischer Energie hat, also

$$\Delta E = \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1v_1}{m_1+m_2}\right)^2 = \frac{2m_1^2m_2v_1^2}{(m_1+m_2)^2}) = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1$$

wobei $E_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ die kinetische Energie von m_1 vor dem Stoß.

2. Fussball mit starren Körpern

Betrachten Sie einen Fussball vom Radius R und der Masse m, welchen Sie hier als Hohlkugel des Trägheitsmoments $I = \frac{2}{3}mR^2$ nähern dürfen. Der Ball liegt auf einer waagrechten Ebene ohne Reibung.

- 1. Ihm wird ein waagrechter Stoß bei der Höhe h über dem Äquator erteilt; dies kann als Kraftwirkung gesehen werden, die auf beliebig kurze Zeitspanne konzentriert ist, wobei das Zeitintegral darüber p ist. Für welche Höhe führt der Ball eine Rollbewegung aus?
Lösung:
Der Vorgang wird als Stoß(eine zeitlich konzentrierte Kraftwirkung) betrachtet, bei dem sowohl Impuls als auch Drehimpuls auf den Ball übertragen werden. Der stossende Fuss hat den Impuls $\vec{p}$; dann ist sein Drehimpuls am Kontaktpunkt

$$L = |\vec{L}| = |\vec{r}\times\vec{p}| = hp \tag{1}$$

Nach dem Stoss muss die Rollbedingung gelten:

$$\begin{aligned} v &= R\omega && (2)\\ \frac{p}{m} &= R\frac{L}{I} && (3)\\ \frac{p}{m} &= R\frac{hp}{I} && (4)\\ \frac{I}{Rm} &= h && (5)\\ & && (6)\end{aligned}$$

Mit dem Trägheitsmoment eingesetzt ergibt sich

$$h = \frac{2}{3}R \tag{7}$$

- 2. Nun wird der Ball auf dem Äquator senkrecht angestossen. Welche Schwerpunkts-

und Rotationsgeschwindigkeit hat er direkt nach dem Stoß?
Lösung:
Der Impuls p wurde auf den Ball übertragen der führt deshalb eine Translationsbewegung mit der Geschwindigkeit $v_0 = \frac{p}{m}$ aus. Da er auf den Äquator, also in Linie mit dem Schwerpunkt gestossen wird, wird dabei kein Drehimpuls übertragen, die Winkelgeschwindigkeit des Balls ist also 0.

- 3. Wie ändern sich diese mit der Zeit, wenn zwischen Ball und Boden eine Gleitreibung mit dem Koeffizienten μ wirkt?
Lösung:
Die Gleitreibung wirkt am Auflagepunkt entgegen der Bewegungsrichtung und mit der Grösse
$$F_R = \mu F_N = \mu m g \tag{8}$$
Diese erzeugt ein Drehmoment, dass die Gleit- in eine Rollbewegung übergehen lässt, und wirkt natürlich auch auf die Translation des Balls. Die beiden Gleichungen, welche die Bewegung beschreiben sind also
$$\begin{aligned} R F_R &= I \dot{\omega} && (9) \\ R \mu m g &= \frac{2}{3} m R^2 \dot{\omega} && (10) \\ \frac{3 \mu g}{2R} &= \dot{\omega} && (11) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} m \dot{v} &= -F_R && (12) \\ \dot{v} &= -\mu g && (13) \end{aligned}$$
Dabei wurden die Vorzeichen so gewählt, dass die Rotation ihre positive Richtung gemäss der Rollbedingung hat.

- 4. Wann setzt für den Ball eine reine Rollbewegung ein? Berechnen Sie die Zeit für $p = 9$ kg m/s und $\mu = 0.4$.
Lösung:
Das obige Gleichungssystem wird gelöst für die Anfangsbedingungen $v(0) = v_0$ und $\omega(0) = 0$. Da die Gleitreibung geschwindigkeitsunabhängig ist, ist die Lösung recht einfach:
$$v(t) = v_0 - \mu g t \tag{14}$$
$$\omega(t) = \frac{3 \mu g}{2R} t \tag{15}$$

Für eine bestimmt Zeit t' wird dann gelten $v(t') = R\omega(t')$, also eingesetzt

$$\begin{aligned} v_0 - \mu g t' &= \frac{3}{2}\mu g t' \quad (16) \\ v_0 &= 5\mu g t' \quad (17) \\ & \quad (18) \end{aligned}$$

Das gesuchte t' ist also tatsächlich eine positive Zeit nach dem Stoss (sonst wäre das Ergebnis nicht sinnvoll!), und

$$t' = \frac{v_0}{5\mu g} = 2.3s \quad (19)$$

Nach dieser Zeit ist der Ball in eine reine Rollbewegung übergegangen. Da sich der Auflagepunkt dann nicht mehr bewegt, verschwindet dann auch die Gleitreibung.

3. Kugeln an Drahtseilen

Drei Metallkugeln der Massen m_1 , m_2 , m_3 sind an langen Drähten so aufgehängt, dass ihre Mittelpunkte auf einer horizontalen Geraden liegen und sich die Kugeln fast berühren. Der Kugel m_1 wird nun eine horizontale Geschwindigkeit v erteilt, so dass sie zentral mit der Kugel m_2 stößt. Finden Sie einen Ausdruck für die kinetische Energie von m_3 und skizzieren Sie diese als Funktion von m_2.

Lösung:

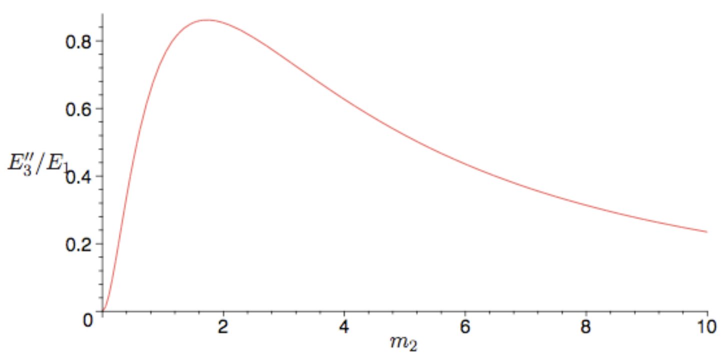
Wir benutzen das Ergebnis aus 1 c) und schreiben

$$E_2' = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}E_1 \quad \text{und} \quad E_3'' = \frac{4m_2m_3}{(m_2+m_3)^2}E_2'$$

zusammen ergibt das

$$E_3'' = \frac{16m_1m_2^2m_3}{(m_1+m_2)^2(m_2+m_3)^2}E_1$$

Wir wollen nun E_3'' in Abhängigkeit von m_2 skizzieren. Diese Funktion ist 0 für $m_2 = 0$ und $m_2 \to \infty$. Dazwischen ist sie immer positiv und hat nur ein Maximum.



4. Kleine Aufgaben

- 1. Das Schaufelrad einer Flugzeugturbine wird als homogener Vollzylinder der Masse M und des Radius R vereinfacht, welcher sich um seine Symmetrieachse mit ω dreht. Es wird nun ein Körper der Masse m am äußeren Rand des Schaufelrades befestigt. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit nun?
  Lösung:
  Es gilt die Drehimpulserhaltung

  $$I_0\omega_0 = I\omega \tag{20}$$

  Dabei ist $I_0 = \frac{MR^2}{2}$ und $I = I_0 + mR^2$. Die resultierende Winkelgeschwindigkeit ist dann

  $$\omega = \frac{I_0}{I}\omega_0 \tag{21}$$

- 2. Was ist größer, das Trägheitsmoment einer Vollkugel oder einer Kugelschale mit gleichem Radius und kleiner Wandstärke? (keine Rechnung notwendig)
  Lösung:
  Das Trägheitsmoment der Kugelschale ist größer, da die Masse nur am Rand konzentriert ist und bei der Berechnung des Trägheitsmoments der Radius quadratisch eingeht.

- 3. Auf einem Spielplatz sitzen sich in einem kleinen Karussell zwei Kinder gegenüber. Das Karussell wird jetzt von außen angeschubst und beide Kinder stehen jetzt gleichzeitig auf und bewegen sich auf die Drehachse zu. Beschreiben Sie was passiert und begründen Sie warum.
  Lösung:
  Das Karussell dreht sich schneller aufgrund der Drehimpulserhaltung.

5. Mehrteilchensystem

Zwei Personen $m_1 = 60$ kg und $m_2 = 100$ kg stehen sich auf zwei Wagen der Massen $M_1 = 10$ kg und $M_2 = 30$ kg gegenüber. Ihr Abstand ist zunächst $d_0 = 50$ m. Die Person m_1 hält ein Ende eines Seil fest in der Hand, die andere (m_2) zieht kräftig am anderen Ende des Seils. Die Wagen prallen im Abstand d vom Startpunkt der Person m_2 aufeinander. Berechne d.
Lösung:
Auf das System wirken nur innere Kräfte, d.h. die Personen treffen sich genau im Schwerpunkt des Systems für dessen konstante Position gilt:

$$X = \frac{(m_1 + M_1)x_1 + (m_2 + M_2)x_2}{m_1 + M_1 + m_2 + M_2}$$

Wenn nur den Nullpunkt des Koordinatensystems in den Startpunkt von Person m_2 legen gilt $x_2 = 0$, $x_1 = d_0$ und $X = d$, also

$$d = \frac{(m_1 + M_1)d_0}{m_1 + M_1 + m_2 + M_2} = 17.5$$

6. Inhomogener Zylinder

Ein inhomogener Zylinder hat den Radius $R = 5cm$, die Länge $l = 20cm$ und ein Trägheitsmoment $I = \frac{17}{30}mR^2$
Der Zylinder ruht am Anfang auf einer schiefen Ebene mit Neigung $\alpha = 30°$ zur Horizontalen. Welche Beschleunigung entlang der Ebene erfährt er beim Herunterrollen?

Lösung:
Da der Auflagepunkt zu jedem Zeitpunkt der ruhende Punkt ist, kann die Bewegung als Drehung um diesen aufgefasst werden. Die Kraft, die das Drehmoment hervorruft, ist der Teil Gewichtskraft auf den Schwerpunkt, welcher parallel zur Ebene angreift:

$$M = |\vec{M}| = Rmg \sin\alpha \tag{22}$$

Kurze Überprüfung der harmonischen Funktion: Ist $\alpha = 0$, sollte der Zylinder nicht beschleunigt werden, und $\sin(0) = 0$.
Das zugehörige Trägheitsmoment ist mit dem Satz von Steiner:

$$I' = I + mR^2 = \frac{47}{30}mR^2 \tag{23}$$

Mit der Bewegungsgleichung

$$M = \dot{L} = I'\dot{\omega} \tag{24}$$

und der Rollbedingung

$$\ddot{s} = R\dot{\omega} \tag{25}$$

ergibt sich für die Beschleunigung entlang der Ebene

$$\ddot{s} = R\dot{\omega} = R\frac{M}{I'} = R\frac{Rmg\sin\alpha}{I} = \frac{30}{47}g\sin\alpha \tag{26}$$

7. Inelastischer Stoß

Ein Teilchen der Masse m_1 stößt zentral und maximal inelastisch mit einem im Laborsystem ruhenden Teilchen der Masse m_2 zusammen. Wieviel kinetische Energie wird dabei in innere Energie (Wärme) umgewandelt? Vergleiche diesen Betrag mit der anfänglichen kinetischen Gesamtenergie bezüglich des Schwerpunktsystems.

Lösung:

Die kinetische Energie vor dem Stoß ist

$$E = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$$

Nach dem maximal inelastischen Stoß bewegen sich beide Teilchen mit der selben Geschwindigkeit und zwar mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit, also ist die kinetische Energie nach dem Stoß

$$E' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)} v_1^2$$

Die in Wärme umgewandelte Energie ist somit

$$Q = E - E' = \frac{1}{2}\left(m_1 - \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}\right) v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} v_1^2$$

Für die anfängliche kinetische Energie im Schwerpunktsystem gilt:

$$\begin{aligned}
E_S &= \frac{1}{2} m_1 \left(v_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{1}{2} m_2 v_1^2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2^2 + m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} v_1^2
\end{aligned}$$

8. Karussell

Zwei Kinder (je $m = 40kg$) sitzen auf einem Karussell, das aus einer Scheibe mit Radius $r = 2m$ und einer Masse $M = 1000kg$ besteht, die um eine Achse in der Mitte drehbar ist. Die Kinder sitzen sich diametral gegenüber am Rand der Scheibe.

- 1. Berechnen Sie das Gesamttragheitsmoment der Scheibe mit den darauf sitzenden Kindern. Betrachten sie die Kinder dafür als Massenpunkt am Rand der Scheibe. Hinweis: Trägheitsmoment der Scheibe $1/2Mr^2$

  Lösung:

  Das gesamte Trägheitsmoment setzt sich zusammen aus dem Trägheitsmoment des Karussells und dem Trägheitsmoment der beiden Kinder. Diese werden als punktf˜rmig angesehen. Das Trägheitsmoment einer Punktmasse lautet bekanntlich mr^2.

$$I_{ges} = \frac{1}{2}Mr^2 + 2mr^2 = 2320kgm^2 \quad (27)$$

- 2. Ein drittes Kind will das Karussell nun am Rand anschieben. Es kann eine maximale Kraft $F = 100N$ aufbringen. Wie lange muss es mit dieser konstanten Kraft schieben, um das Karussell auf eine zehntel Umdrehung pro Sekunde zu beschleunigen?
  Lösung:
  Zunächst können wir das Drehmoment bestimmen, das das dritte Kind aufbringt.

  $$M = F \cdot r = 200J \quad (28)$$

  Dies kann in Relation mit der Winkelgeschwindigkeit gesezt werden.

  $$M = I_{ges} \cdot \dot{\omega} \quad (29)$$

  Und ¸ber $\dot{\omega} = \frac{\omega}{t}$ folgt schlieflich:

  $$t = \frac{\omega}{\dot{\omega}} = \frac{I_{ges}\omega}{F \cdot r} = 7,29s \quad (30)$$

- 3. Die Kinder auf dem Karussell haben einen Haftreibungskoeffizienten von $\mu = 0.5$ Bei welcher Drehfrequenz (Umdrehungen/Sekunde) fallen sie herunter?
  Lösung:
  Sobald die Zentripetalkraft die Haftreibungskraft überschreitet, fallen die Kinder herunter. Wir berechnen nun den Grenzfall, wo sich beide Kräfte gegenseitig aufheben ($F_Z = F_R$).

  $$\mu mg = \omega^2 rm \quad (31)$$

  Hieraus folgt die Grenzwinkelgeschwindigkeit:

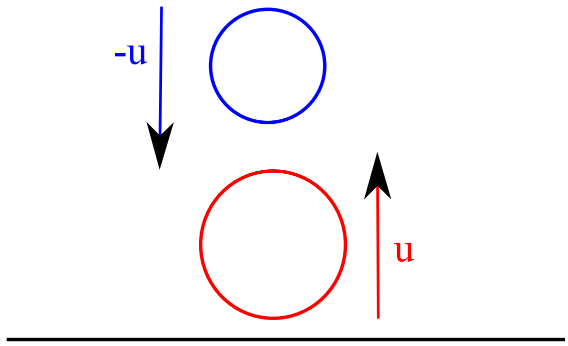
  $$\omega = \sqrt{\frac{\mu g}{r}} = 1,57Hz \quad (32)$$

  Also ab einer Drehfrequnz von 0,25 Umdrehungen pro Sekunde fliegen die Kinder herunter.

9. Vertikaler Stoß

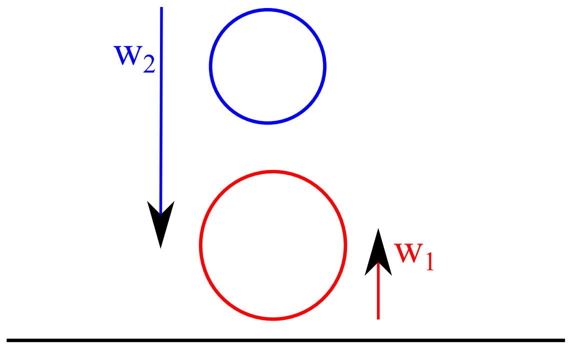
Zwei Kugeln werden gleichzeitig mit einem sehr kleinen vertikalen Abstand aus der Höhe h über der Erde fallen gelassen. Die obere Kugel habe die Masse m und die untere die Masse M mit $M > m$. Die Radien der Kugeln seien klein im Vergleich zu h und können vernachlässigt werden. Der Geschwindigkeitsbetrag der unteren Kugel unmittelbar bevor sie den Boden erreicht sei u. Nehme alle Stöße als elastisch an und vernachlässige in den Rechnungen den vertikalen Abstand der Kugeln.

a) Skizziere die Situation, wie sie im Laborsystem gesehen unmittelbar nach dem Auftreffen der unteren Kugel auf dem Boden, aber vor dem Zusammenstoß der unteren mit der oberen Kugel gesehen wird.
Lösung:



Die Geschwindigkeiten wurden nach oben als positiv definiert. Da der vertikale Abstand der Kugeln zu vernachlässigen ist, hat die obere Kugel unmittelbar vor dem Zusammenstoß mit der unteren die Geschwindigkeit $-u$

b) Skizziere die gleiche Situation im Schwerpunktsystem.
Lösung:



Im Schwerpunktsystem hab die Kugeln nun unterschiedlich große Geschwindigkeiten, wobei die untere schwerere Kugel die kleiner Geschwindigkeit besitzt.

c) Zeige, dass die Geschwindigkeit der oberen Kugel im Laborsystem unmittelbar nach dem Zusammenstoß der beiden Kugeln gegeben ist durch

$$v = \frac{3M - m}{M + m} u$$

Lösung:
Es ist einfacher im Schwerpunktsystem zu rechnen, da hier die Geschwindigkei-

ten beim elastischen Stoß einfach ihr Vorzeichen wechseln. Unmittelbar vor dem Zusammenstoß der beiden Kugeln gilt die Geschwindigkeiten im SPS

$$w_1 = u - V \qquad \text{und} \qquad w_2 = -u - V$$

Für die Schwerpunktsgeschwindigkeit gilt

$$V = \frac{Mu - mu}{M + m} = \frac{M - m}{M + m} u$$

Unmittelbar nach dem Zusammenstoß gilt für die Geschwindigkeit der oberen Kugel im SPS

$$w_2' = -w_2 = u + V$$

und zurückgerechnet ins Laborsystem

$$v_2' = w_2' + V = u + 2V = u\left(1 + 2\frac{M - m}{M + m}\right) = \frac{3M - m}{M + m} u$$

d) Bestimme die maximale Höhe, die die obere Kugel erreicht.
Lösung:
An ihrer maximalen Höhe hat die obere Kugel eine reine potentielle Energie von mgh_{max}. Unmittelbar nach dem Zusammenstoß (näherungsweise bei $h = 0$) hat die obere Kugel eine reine kinetische Energie von $\frac{1}{2}mv_2^2$. Wegen Energieerhaltung muss gelten

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = mgh_{max}$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{u^2}{2g}\left(\frac{3M - m}{M + m}\right)^2$$

Aus der ursprünglichen Abwurfhöhe h folgt abermals per Energieerhaltung, dass $u^2 = 2gh$, also

$$h_{max} = \left(\frac{3M - m}{M + m}\right)^2 h$$