Musterlösung Analysis 3 - Integralsätze

12. März 2011

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(i) Berechne die Gramsche Matrix und Determinante für die folgenden Fälle:

(1) Für die Kugeloberfläche $\partial K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2\}$

Lösung:

$$G(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

und es ergibt sich $g(\theta, \phi) = R^4 \sin^2(\theta)$

(2) Für die Oberflächen eines Zylinders der Höhe h und des Radius ρ.

Lösung: Man muss die Oberfläche hier trennen und die einzelnen Komponenten zerlegen. Wir verwenden durchgehend Zylinderkoordinaten Betrachten wir zunächst den Mantel M:= $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = \rho^2, z \in [0, h]$:

$$G(\varphi, z) = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und daher $g(\varphi, z) = \rho^2$. Für den Boden (und respektive auch den Deckel) gilt, dass z konstant ist und wir erhalten deshalb

$$G(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

und $g(r, \varphi) = r^2$.

(ii) Zeige, dass sich der Flächeninhalt des regulären Flächenstückes $S = \mathbf{x}(\mathcal{A})$ mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

als $\int\limits_S dO = \int\limits_{\mathcal{A}} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, d\lambda^2(x,y)$ schreiben lässt.

Beweis: Für die Gram Matrix ergibt sich

$$G(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + f_x^2(x,y) & f_x^2(x,y) f_y^2(x,y) \\ f_y^2(x,y) f_x^2(x,y) & 1 + f_y^2(x,y) \end{pmatrix}$$

und die Gramsche Determinante $g(x,y) = 1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)$. Aus der Definition des Oberflächenintegrales ergibt sich nun

$$\int\limits_S dO = \int\limits_{\mathcal{A}} \sqrt{g(x,y)}\, d\lambda^2(x,y) = \int\limits_{\mathcal{A}} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, d\lambda^2(x,y)$$

(iii) Sei $0 \leq f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ und $\mathbf{x} : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x}(u,v) = (u, g(u)\cos v, g(u)\sin v)$ eine Parametrisierung, dann gilt für das Flächenstück $S = \mathbf{x}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = [a,b] \times [0,2\pi]$

$$\int_S dO = 2\pi \int_a^b g(u)\sqrt{1 + g_u^2(u)}d\lambda^1(u)$$

Beweis: Wie schon zuvor ergibt sich für die Gramsche Matrix

$$G(u,v) = \begin{pmatrix} 1 + g_u^2(u) & 0 \\ 0 & g^2(u) \end{pmatrix}$$

und daher für die Gramsche Determinante

$$g(u,v) = g^2(u)(1 + g_u^2(u))$$

Aus der Definition des Oberflächenintegrales folgt nun

$$\int_S dO = \int_{\mathcal{A}} g(u)\sqrt{1 + g_u^2(u)}\lambda^2 u, v = 2\pi \int_a^b g(u)\sqrt{1 + g_u^2(u)}d\lambda^1(u)$$

Aufgabe 2: Satz von Green und Satz von Stokes

(i) Beweise dem Satz von Gauß in 2 Dimensionen in der Form

$$\iint_{\mathcal{A}} \triangle u d\lambda^2 = \int_{\partial\mathcal{A}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial u}{\partial y}dx\right)$$

Beweis: Man wende den Greenschen Satz auf das Vektorfeld $\mathbf{F} = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)^T$ an. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{A}} \triangle u d\lambda^2 &= \iint_{\mathcal{A}} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right] \\
&= \int_{\partial\mathcal{A}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \\
&= \int_{\partial\mathcal{A}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\dot{y}(s) - \frac{\partial u}{\partial y}\dot{x}(s)\right) ds \\
&= \int_{\partial\mathcal{A}} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx\right)
\end{aligned}$$

wobei $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ als Weg verwendet wurde.

(ii) Beweise die sogenannte Leibniz-Flächenformel

$$F(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x})dt$$

wobei $F(\gamma)$ die vom $\mathcal{C}^1$-Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) := (x(t), y(t))^T$ umschlossene Fläche bezeichnet.

Hinweis: Betrachte das Vektorfeld $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y, x)^T$.

Beweis: Wir verwenden den Satz von Stokes:

$$\int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_A \left(\frac{\partial}{\partial x} F_2 - \frac{\partial}{\partial x} F_1 \right) d\lambda^2 = \text{ Fläche von } A$$

und die Linke Seite ergibt mit $\dot{\gamma} = (\dot{x}, \dot{y})^T$

$$\int_{\partial A} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \frac{1}{2} \int_a^b \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

(iii) Berechne das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

für die folgenden Wege γ und Vektrofelder $\mathbf{F}$.

(1) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} yz \\ -y(x^2+z^2) \\ -yx \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t \\ \sin t \end{pmatrix} , t \in [0, 2\pi]$

Lösung:

$$\int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} t \sin t \\ -t \\ -t \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix} dt = -\int_0^{2\pi} 2t dt = -4\pi$$

(2) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} ye^x \\ z^2 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix} , t \in (0, 1)$

Lösung:

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt = 2 \int_0^1 [t^2 + t^3] dt = \frac{7}{6}$$

(3) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ e^{-t} \end{pmatrix} , t \in [0, 1]$

Lösung

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} -\sinh t \\ \cosh t \\ e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1 - e^{-2t}) dt = \frac{1}{2e^2} [1 + e^2]$$

(iv) Bestätige den Satz von Stokes für das Flächenstück $K_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ und das Vektorfeld $\mathbf{A} = \frac{1}{2} (-y, x, 0)^T$.

Lösung: Wegen $\nabla \times \mathbf{A} = (0, 0, 1)^T$ gilt

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{A})\, d\mathbf{O} = \int_S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R^2 \cos\varphi \sin^2\theta \\ R^2 \sin\varphi \sin^2\theta \\ R^2 \cos\theta \sin\theta \end{pmatrix} d\lambda^2 = \pi R^2$$

Wir parametrisieren den Rand von S durch $\gamma(t) = (R\cos(t), R\sin(t), 0)$, $t \in (0, 2\pi)$ und damit erhalten wir

$$\int_{\partial S} \mathbf{A} d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R\sin(t) \\ R\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \pi R^2$$

Aufgabe 3: Integration im Raum und Satz von Gauß

(i) Betrachte die beiden Zylinder $Z_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $Z_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$. Berechne das Volumen und die Oberfläche des Körpers $K = Z_1 \cup Z_2$.

Lösung: Aus den Bedingungen erhält man $-1 \leq x \leq 1$, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ und $-\sqrt{1-x^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$. Daher lautet das Volumen des Körpers

$$\begin{aligned} V(K) &= \iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz \\ &= 2 \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \sqrt{1-x^2} \\ &= 4 \int\limits_{-1}^{1} dx (1-x^2) \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Aus den beiden Ungleichungen in den Bedinungen zu unserem Körper ergeben sich vier gleich große Oberflächen, welche den Bedingungen $y_\pm = \sqrt{1-x^2}$ und $z_\pm = \sqrt{1-x^2}$ genügen. Die Oberfläche berechnet sich dann durch

$$O(\partial K) = O(\partial K_{y_+} \cup \partial K_{y_-} \cup \partial K_{z_+} \cup \partial K_{z_-}) = 4O(\partial K_{z_+}) = \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 16$$

Hierbei wurde das Flächenelement $\mathrm{d}O(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dxdy$ verwendet, welches sich aus der Parametrisierung von ∂K_{z_+} mit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_+(x,y) \end{pmatrix}$$

ergeben hat.

(ii) Betrachte die Hohlkugel $K := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 1 - d \leq |x| \leq 1\}$ mit $0 < d < 1$ und $|\cdot|$ als die euklidische Norm. Berechne das Integral

$$u(P) = \gamma \int\limits_K \frac{1}{|x-P|} \mathrm{d}\lambda^3$$

wobei γ eine konstante ist.

Hinweis: Wähle o.B.d.A. $P = (0,0,p)^T$ und verwende später die Substitution $\zeta = -\cos(\theta)$.

Lösung: Wir parametrisieren mit Kugelkoordinaten, dann gilt

$$|x-P|^2 = r^2 + p^2 - 2rp\cos(\theta)$$

und man erhält damit

$$
\begin{aligned}
u(P) &= \gamma \int\limits_{1-d}^{1} \mathrm{d}r r^2 \int\limits_{0}^{\pi} \mathrm{d}\theta \sin(\theta) \int\limits_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{1}{\sqrt{r^2+p^2-2rp\cos theta}} \\
&= 2\pi\gamma \int\limits_{1-d}^{1} \mathrm{d}r r^2 \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{d}\zeta \frac{1}{\sqrt{r^2+p^2+2rp\zeta}} \\
&= 2\pi\gamma \int\limits_{1-d}^{1} \mathrm{d}r \frac{r}{p} \left[\sqrt{r^2+p^2+2rp\zeta}\right]_{-1}^{1} \\
&= 2\pi\gamma \int\limits_{1-d}^{1} \mathrm{d}r \frac{r}{p} 2p \\
&= 2\pi\gamma d(2-d)
\end{aligned}
$$

(iii) Integrieren sie die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$
g(x,y,z) := \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}
$$

über das Ellipsoid $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1\}$ mit den Halbachsen $a, b, c > 0$.

Lösung: Wir verwenden die folgende Parametrisierung

$$
\mathbf{x} : (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \ , \ \mathbf{x} := (a \sin\theta \cos\varphi, b \sin\theta \sin\varphi, c \cos\theta)^T
$$

und damit ergibt sich

$$
\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi = \sin\theta \, (bc \sin\theta \cos\varphi, ac \sin\theta \sin\varphi, ab \cos\theta)^T
$$

Daher gilt

$$
|\mathbf{x}_\theta \times \mathbf{x}_\varphi|^2 = a^2 b^2 c^2 \sin^2\theta \left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} \right)
$$

und es ergibt sich für das Oberflächenintegral

$$
\int\limits_E g dO = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta abc \sin\theta \left(\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} \right) = \frac{4}{3}\pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)
$$

(iv) Sei $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ und $\mathbf{F} = (x + y\sin(z), y, e^x)^T$ ein Vektorfeld. Berechnen sie

$$
\int\limits_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}
$$

Lösung:

$$
\int\limits_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O} = \int\limits_U \operatorname{div}(\mathbf{F}) d\lambda^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi 3^3 = 72\pi
$$

(v) Berechne das Volumen von $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

Lösung: Wir parametrisieren K mit Hilfe von Zylinderkoordinaten und erhalten dann die Bedingungen: $r^2 + z^2 \leq 4 \to z^2 \leq 4 - r^2$, $r \leq 2\cos(\varphi)$ und aus der Letzten und der Tatsache, dass $r > 0$ in Zylinderkoordinaten gilt, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. Man mache sich klar das druch die Unterscheidung unsere Körper in zwei Integrationsabschnitte K_1 und K_2 zerfällt, und dass diese gleiches Volumen haben (falls dies nicht klar sein sollte, berechnet man beide Volumina explizit). Daher gilt

$$\begin{aligned}
V(K) = 2V(K_1) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos(\varphi)} drr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} dz \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos(\varphi)} drr\sqrt{4-r^2} \\
&= \frac{2^5}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[1 - (1-\cos^2(\varphi))^{\frac{3}{2}}\right] \\
&= \frac{2^5}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi[1 - \sin^3(\varphi)] \\
&= \frac{16}{9}[3\pi - 4]
\end{aligned}$$

(vi) Verifiziere den Satz von Gauß durch explizites Ausrechenen für den Körper $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (1-z), z \in [0,1]\}$ und das Vektorfeld $\mathbf{F} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

Lösung: Wir müssen den Körper K in zwei Flächensegmente aufteilen, in den Boden und den Mantel, und parametrisieren diese Beiden dann mit Hilfe von Zylinderkoordinaten. Beginen wir mit dem Mantel. Hier ist die Parametrisierung durch

$$\mathbf{x}_M = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ (1-r^2) \end{pmatrix}$$

gegeben, woraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{x}_M \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{x}_M = \begin{pmatrix} 2r\cos\varphi \\ 2r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \quad , \ |\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{x}_M \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{x}_M| = \sqrt{4r^2+1}$$

Hiermit ergibt sich

$$\int_M \mathbf{F}d\mathbf{O} = \int_M (2r^2 + (1-r^2)r)drd\varphi = \frac{3}{2}\pi$$

Für den Boden ergibt sich

$$\mathbf{x}_B = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben, woraus folgt:

$$\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{x}_M \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{x}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \quad , \ |\frac{\partial}{\partial r}\mathbf{x}_M \times \frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{x}_M| = r$$

Und daher

$$\int_B \mathbf{F}d\mathbf{O} = \int_B (-r)zdrd\varphi = 0$$

Andererseits ergibt sich

$$\int_K \operatorname{div}(\mathbf{F}) d\lambda^3 = 3 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} dr r = \frac{3}{2}\pi$$

womit der Gaußsche Satz explizit bestätigt wurde.