Angabe Analysis 3 - Integralsätze

12. März 2011

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(i) Berechne die Gramsche Matrix und Determinante für die folgenden Fälle:

(1) Für die Kugeloberfläche $\partial K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2\}$

(2) Für die Oberflächen eines Zylinders der Höhe h und des Radius ρ.

(ii) Zeige, dass sich der Flächeninhalt des regulären Flächenstückes $S = \mathbf{x}(\mathcal{A})$ mit der Parametrisierung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix}$$

als $\int\limits_S dO = \int\limits_{\mathcal{A}} \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)} d\lambda^2(x,y)$ schreiben lässt.

(iii) Sei $0 \leq f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ und $\mathbf{x} : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \mathbf{x}(u,v) = (u, g(u)\cos v, g(u)\sin v)$ eine Parametrisierung, dann gilt für das Flächenstück $S = \mathbf{x}(\mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = [a,b] \times [0,2\pi]$

$$\int\limits_S dO = 2\pi \int\limits_a^b g(u)\sqrt{1 + g_u^2(u)} d\lambda^1(u)$$

Aufgabe 2: Satz von Green und Satz von Stokes

(i) Beweise dem Satz von Gauß in 2 Dimensionen in der Form

$$\iint\limits_{\mathcal{A}} \triangle u d\lambda^2 = \int\limits_{\partial\mathcal{A}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx \right)$$

(ii) Beweise die sogenannte Leibniz-Flächenformel

$$F(\gamma) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b (x\dot{y} - y\dot{x}) dt$$

wobei $F(\gamma)$ die vom $\mathcal{C}^1$-Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) := (x(t), y(t))^T$ umschlossene Fläche bezeichnet.

Hinweis: Betrachte das Vektorfeld $\mathbf{F} = \frac{1}{2}(-y, x)^T$.

(iii) Berechne das Kurvenintegral

$$\int\limits_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}$$

für die folgenden Wege γ und Vektrofelder $\mathbf{F}$.

(1) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} yz \\ -y(x^2+z^2) \\ -yx \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t \\ \sin t \end{pmatrix} , t \in [0, 2\pi]$

(2) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} ye^x \\ z^2 \\ y \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \ln t \\ t^2 \\ t \end{pmatrix} , t \in (0, 1)$

(3) $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ z \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \\ e^{-t} \end{pmatrix} , t \in [0, 1]$

(iv) Bestätige den Satz von Stokes für das Flächenstück $K_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$ und das Vektorfeld $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(-y, x, 0)^T$.

Aufgabe 3: Integration im Raum und Satz von Gauß

(i) Betrachte die beiden Zylinder $Z_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ und $Z_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$. Berechne das Volumen und die Oberfläche des Körpers $K = Z_1 \cup Z_2$.

(ii) Betrachte die Hohlkugel $K := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 1 - d \leq |x| \leq 1\}$ mit $0 < d < 1$ und $|\cdot|$ als die euklidische Norm. Berechne das Integral

$$u(P) = \gamma \int\limits_K \frac{1}{|x - P|} \mathrm{d}\lambda^3$$

wobei γ eine konstante ist.

Hinweis: Wähle o.B.d.A. $P = (0, 0, p)^T$ und verwende später die Substitution $\zeta = -\cos(\theta)$.

(iii) Integrieren sie die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$g(x, y, z) := \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$$

über das Ellipsoid $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{c^2} = 1\}$ mit den Halbachsen $a, b, c > 0$.

(iv) Sei $U := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ und $\mathbf{F} = (x + y\sin(z), y, e^x)^T$ ein Vektorfeld. Berechnen sie

$$\int\limits_{\partial U} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{O}$$

(v) Berechne das Volumen von $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \text{ und } x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

(vi) Verifiziere den Satz von Gauß durch explizites Ausrechenen für den Körper $K := \{x \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (1 - z), z \in [0, 1]\}$ und das Vektorfeld $\mathbf{F} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.