Lösung zu den Übungsaufgaben zur Lebesgueschen Integrationstheorie

Tobias Ried

10. März 2011

Aufgabe 1 (Messbarkeit der Komposition zweier Abbildungen)**.** Seien $(X, \mathfrak{A})$, $(Y, \mathfrak{B})$ und $(Z, \mathfrak{C})$ Messräume und $f : (X, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$, $g : (Y, \mathfrak{B}) \to (Z, \mathfrak{C})$ messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ g : (X, \mathfrak{A}) \to (Z, \mathfrak{C})$ messbar ist.

Lösung. Sei $C \in \mathfrak{C}$ beliebig. Dann ist wegen der Messbarkeit von g die Menge $B := g^{-1}(C) \in \mathfrak{B}$. Aus der Messbarkeit von f folgt dann sofort

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(C)) = (f \circ g)^{-1}(C) \in \mathfrak{A}$$

und damit $f \circ g$ messbar.

Aufgabe 2 (Messbarkeit wichtiger Funktionen)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar sind.

Lösung. Nach Vorlesung ist die Messbarkeit einer Funktion $f : (X, \mathfrak{A}) \to (Y, \mathfrak{B})$ äquivalent zur Messbarkeit der Menge $\{f \leq \alpha\}$ bzw. $\{f \geq \alpha\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$, also ist zu zeigen, dass $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{A} \, \forall \, \alpha \in \mathbb{Q}$.

Sei nun $f := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$. Es gilt

$$\left\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \alpha \right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\}.$$

Nun sind aber die Mengen $\{f_n \leq \alpha\} \in \mathfrak{A} \, \forall \, n \in \mathbb{N}$ wegen der Messbarkeit von f_n. Aus der Definition einer σ-Algebra folgt dann insbesondere, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\} \in \mathfrak{A}$ und damit die Messbarkeit von f.

Für die Funktion $\tilde{f} := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ geht man ähnlich vor: es ist nun

$$\left\{ \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha \right\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\},$$

wobei die Mengen $\{f_n \geq \alpha\}$ messbar sind wegen der Messbarkeit aller f_n. Daraus folgt wie oben $\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$ und somit $\tilde{f}$ messbar.

Aufgabe 3 (Monotone Konvergenz)**.** Zeigen Sie:
Für alle $f \in E^*$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n \int \log\left(1 + \frac{1}{n} f\right) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$$

HINWEIS: Warum gilt $\left(1 + \frac{1}{n} f\right)^n \uparrow_n \exp(f)$?

Lösung. Idee: Wende den Satz zur monotonen Konvergenz auf die Folge $f_n := n \log\left(1 + \frac{1}{n} f\right) = \log\left(1 + \frac{1}{n} f\right)^n$ an.

Es gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n} f\right)^n \uparrow \exp(f),$$

denn für alle $x \in \mathbb{R}$ ist

$$\left(1 + \frac{1}{n} f(x)\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(f(x))^k}{n^k} \quad \uparrow_n \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(f(x))^k}{k!} = \exp(f(x))$$

(hierbei wurde verwendet: $\binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \uparrow \frac{1}{k!}$).

Wegen der Monotonie und Stetigkeit des Logarithmus ($f \in E^*$) gilt dann aber auch $f_n \uparrow f$, denn

$$\lim_{n\to\infty} \log\left(\left(1 + \frac{1}{n} f\right)^n\right) = \log\left(\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n} f\right)^n\right) = \log\left(\exp(f)\right) = f$$

Nach dem Satz zur monotonen Konvergenz ist also

$$\lim_{n\to\infty} n \int \log\left(1 + \frac{1}{n} f\right) \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n} f\right) \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$$

Aufgabe 4 (Integral auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$)**.** Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit dem Zählmaß μ. Darauf sei eine messbare Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) =: f_n$ definiert.

1. Begründen Sie
$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n.$$

2. Formulieren Sie für obiges Integral auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ den Satz zur majorisierten Konvergenz (ausgedrückt für Reihen).

3. Sei nun auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ ein anderes Maß ν definiert durch $\nu(\{n\}) := 4^{-n}$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f_n = f(n) = (-3)^n$ gegeben. Ist ν normiert, also $\nu(\mathbb{N}) = 1$? Warum ist f integrierbar? Berechnen Sie
$$\int f \, \mathrm{d}\nu, \qquad \int 1_{2\mathbb{N}} f \, \mathrm{d}\nu$$

Lösung. 1. Wir beweisen die Beziehung gemäß der Lebesgueschen Leiter zunächst für Elementarfunktionen E. Im Falle $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ sind Elementarfunktionen Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern. Sei also $a \in E$ in Normaldarstellung, dann besitzt a die Darstellung
$$a = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \mathbf{1}_{\{k\}}.$$

Man bemerke dass es sich bei der Summe $\sum_{k \in \mathbb{N}}$ tatsächlich um eine *endliche* Summe handelt (wegen der Definition von a). Nun ist es aber leicht, das Integral anzugeben:
$$\int a \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k \underbrace{\mu(\{k\})}_{=1} = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k,$$

womit die Aussage für Elementarfunktionen bewiesen wäre.

Jetzt betrachten wir monotone Limites von Elementarfunktionen. Da für jede positive Folge $a \in [0, \infty)^{\mathbb{N}}$ gilt $\mathbf{1}_{\{1,\dots,N\}} a \quad \uparrow_N \quad a$, ist $E^* = [0, \infty)^{\mathbb{N}}$. Damit ist für $a \in E^*$
$$\int a \, \mathrm{d}\mu = \lim_{N \to \infty} \int \mathbf{1}_{\{1,\dots,N\}} a \, \mathrm{d}\mu = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Wegen $f = f^+ - f^-$ mit $f^\pm \in E^*$ gilt nun

$$\begin{aligned}\int f \,\mathrm{d}\mu &= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^+ - \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^- = \sum_{n\in\mathbb{N}} (f_n^+ - f_n^-) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\end{aligned}$$

f ist integrierbar genau dann, wenn $\int |f| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \leq \infty$, d.h. wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ absolut konvergent ist.

2. Der Satz zur majorisierten Konvergenz lautet hier:
Seien $(a_n), (a_n^{(k)})$ Folgen in $\mathbb{R}$ $(k, n \in \mathbb{N})$ mit $\lim_{k\to\infty} a_n^{(k)} = a_n$ punktweise, und existiere eine summierbare Folge (b_n) in $\mathbb{R}$, $b_n \geq 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$ mit
$$|a_n^{(k)}| \leq b_n \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \,\text{(punktweise)}.$$
Dann sind $a_n^{(k)}$ und a_n summierbar $\forall\, k \in \mathbb{N}$ und es gilt
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n^{(k)}$$

3. Es ist
$$\nu(\mathbb{N}) = \int \mathbf{1}_{\mathbb{N}} \,\mathrm{d}\nu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-1} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$
und damit ν nicht normiertes Maß.

Weiter ist f integrierbar, denn
$$\int |f| \,\mathrm{d}\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n| \,\nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 3 < \infty$$
und damit
$$\int f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = -\frac{3}{4}\frac{1}{1+\frac{3}{4}} = -\frac{3}{7}$$

$$\int \mathbf{1}_{2\mathbb{N}} f \,\mathrm{d}\nu = \sum_{n\in 2\mathbb{N}} f_n \,\nu(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^{2n} = \frac{9}{16}\frac{1}{1-\frac{9}{16}} = \frac{9}{7}$$

Aufgabe 5 (Integrierbarkeit)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mathbf{1}_{[n-1,n)}(x)$$

nicht Lebesgue-integrierbar ist. Wie ist dann die Gleichung

$$\int_0^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = \log 2$$

zu verstehen?
Hinweis: Wie sieht der Graph von f aus? Finden Sie einen einfachen Ausdruck für $|f|$ und zeigen Sie, dass $|f|$ nicht Lebesgue-integrierbar ist. Warum ist dann f nicht Lebesgue-integrierbar?

Lösung. Der Graph von f ist in Abbildung 1 gezeigt. Die Funktion besteht

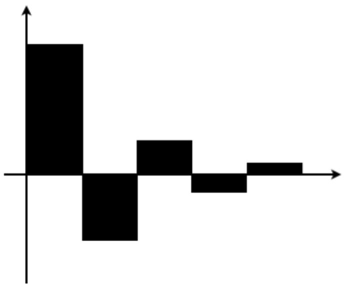

Abbildung 1: Graph der Funktion f.

also aus Balken der Fläche $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Man würde erwarten, dass der Wert des Integrals

$$\int_0^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log 2$$

ist. Dies ist jedoch nur der Fall, wenn man das Integral als *uneigentliches Regelintegral*

$$\int_0^{\infty} f(x) \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_0^b f(x) \mathrm{d}x$$

auffasst.

Im Rahmen der Lebesgueschen Theorie ist f nicht integrierbar, denn

$$|f| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[n-1,n)}$$

und mit monotoner Konvergenz (bei *)

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mathbf{1}_{[n-1,n)} \quad \uparrow_N \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \mathbf{1}_{[n-1,n)}(x)$$

gilt

$$\int |f| \, \mathrm{d}\lambda = \int \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[n-1,n)} \, \mathrm{d}\lambda \stackrel{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{n} \mathbf{1}_{[n-1,n)} \, \mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

Damit ist $|f|$ nicht integrierbar, und wegen $|f| = f^+ + f^-$ ist f^+ oder f^- nicht integrierbar und daher per Konstruktion des Integrals $f = f^+ - f^-$ nicht integrierbar.

Aufgabe 6 (Integration bezüglich Maßen mit Dichten und Bildmaßen)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\mu := f(\lambda^2)$ das Bilmaß des 2-dimensionalen Lebesgue-Maßes unter f.

1. Warum ist f messbar?

2. Berechnen Sie $\mu([a, b])$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

3. Bestimmen Sie eine Dichte ρ, sodass $\rho\lambda^1([a, b]) = \mu([a, b])\ \forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

4. Wie lautet die Radon-Nikodym Ableitung von μ bezüglich λ^1?

Lösung. 1. f ist stetig und daher messbar.

2. Es ist für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$:

$$\begin{aligned} \mu([a, b]) &= \lambda^2(f^{-1}([a, b])) = \lambda^2(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b\}) \\ &= \lambda^2(\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \in [a, b]\}) = \begin{cases} 0, & b \leq 0 \\ \pi(b^2 - a^2), & 0 \leq a \leq b \\ \pi b^2, & a \leq 0 \leq b \end{cases} \end{aligned}$$

3. Für die Dichte $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ muss $\forall\, a \leq b$ gelten

$$\mu([a, b]) = (\rho\lambda^1)([a, b]) = \int_{[a,b]} \rho \,\mathrm{d}\lambda^1 = \int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $\mu([a, b])$ aus (2). Ableiten der Gleichung nach b liefert

$$\rho(b) = \begin{cases} 0, & b \leq 0 \\ 2\pi b, & b \geq 0 \end{cases}$$

Die Dichte $\rho(x) = \max\{0, 2\pi x\}$ erfüllt also $(\rho\lambda^1)([a, b]) = \mu([a, b])$ $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

4. Nach dem Satz von Radon-Nikodym ist die Radon-Nikodym-Ableitung von μ bzgl. λ^1 gerade die Dichte ρ, also

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda^1} = \rho$$

Aufgabe 7 (Integration bezüglich Maßen mit Dichten und Bildmaßen)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = \log|x|$, $f(0) := -\infty$.

1. Warum ist f messbar?
2. Sei $\mu := f(\lambda^1)$. Berechnen Sie $\mu([a, b])$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.
3. Sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho(x) = 2e^x$. Zeigen Sie: $\rho\lambda^1 = \mu$.
4. Wie lautet die Radon-Nikodym Ableitung von μ bezüglich λ^1?

Lösung. 1. f ist messbar, denn

$$\begin{aligned}\{f \leq a\} &= f^{-1}([-\infty, a]) = \{x \in \mathbb{R} : \log|x| \leq a\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq e^a\} \\ &= [-e^a, e^a]\end{aligned}$$

ist ein abgeschlossenes Intervall und daher $\{f \leq a\} \in \mathcal{B}$.

2. Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ gilt

$$\begin{aligned}\mu([a, b]) &= \lambda^1(f^{-1}([a, b])) = \lambda^1(\{x \in \mathbb{R} : a \leq \log|x| \leq b\}) \\ &= \lambda^1(\{x \in \mathbb{R} : e^a \leq |x| \leq e^b\}) = \lambda^1(\{x \in \mathbb{R} : |x| \in [e^a, e^b]\}) \\ &= 2(e^b - e^a)\end{aligned}$$

3. Es ist

$$\rho\lambda^1([a, b]) = \int_{[a,b]} \rho \, \mathrm{d}\lambda^1 = 2(e^b - e^a) = \mu([a, b])$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Damit stimmen μ und $\rho\lambda^1$ auf allen abgeschlossenen Intervallen, also einem Erzeuger der Borel-Algebra $\mathcal{B}$, überein und müssen daher euf ganz $\mathcal{B}$ gleich sein.

4. Wie in Aufgabe 6.4. ist

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\lambda^1} = \rho$$

Aufgabe 8 (Integrierbarkeit mit Fubini)**.** Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini, dass die Funktion

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}, \quad x,y>0$$

nicht λ^2-integrierbar über der Menge $B=[0,1]^2$ ist.

Lösung. Für die iterierten Integrale gilt

(i)

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&\overset{[1]}{=} \int_0^1 \left(\int_y^{1+y} \frac{\xi-2y}{\xi^3}\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_y^{1+y} \frac{1}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi - 2y\int_y^{1+y} \frac{1}{\xi^3}\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\left[-\frac{1}{\xi}\right]_y^{1+y} + y\left[\frac{1}{\xi^2}\right]_y^{1+y}\right)\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{1}{1+y}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

wobei bei [1] die Substitution $\xi = x+y$ verwendet wurde.

(ii)

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&\overset{[2]}{=} \int_0^1 \left(\int_x^{1+x} \frac{2x-\eta}{\eta^3}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2x\int_x^{1+x} \frac{1}{\eta^3}\,\mathrm{d}\eta - \int_x^{1+x} \frac{1}{\eta^2}\,\mathrm{d}\eta\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(-x\left[\frac{1}{\eta^2}\right]_x^{1+x} + \left[\frac{1}{\eta}\right]_x^{1+x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

wobei bei [2] die Substitution $\eta = x+y$ verwendet wurde.

Die Ergebnisse stimmen also nicht überein, d.h. der Satz von Fubini gilt nicht für die Funktion f. Das ist nur möglich, wenn f nicht λ^2-integrierbar über $[0,1]^2$ ist, also

$$\int_{[0,1]^2} f\,\mathrm{d}\lambda^2 = \infty.$$

Aufgabe 9 (Ebene Polarkoordinaten und Integrierbarkeit)**.** Das 2-dim. Lebesgue-Maß λ^2 werde einer Transformation in ebene Polarkoordinaten unterworfen.

1. Geben Sie die Transformation Ψ (Definitionsbereich mit Begründung) samt Jacobimatrix $D\Psi$ und Funktionaldeterminante an.
2. Wie transformiert sich λ^2?
3. Gegeben sei nun zusätzlich eine messbare und beschränkte Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f = \mathcal{O}(\|x\|^\alpha)$ für $\|x\| \to \infty$. Zeigen Sie mit obiger Transformation, dass f integrierbar ist, falls $\alpha < -2$. Argumentieren Sie sauber, indem Sie die an den jeweiligen Stellen relevanten Sätze nennen!

Lösung. 1. $\Psi : U \to V$, $U, V \subset \mathbb{R}^2$ offen, muss ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus sein, also Ψ bijektiv und Ψ, Ψ^{-1} stetig differenzierbar. Wähle nun als Abbildungsvorschrift $\Psi :\ (0,\infty)\times(0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0\}$,

$$\Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Dann sind U und V offen, Ψ bijektiv und stetig differenzierbar und wegen

$$D\Psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}, \quad |\mathrm{det} D\Psi(r,\varphi)| = r$$

invertierbar für alle $(r,\varphi) \in (0,\infty)\times(0,2\pi)$ mit stetig differenzierbarer Umkehrarbbildung (es gilt $D\Psi^{-1}(x,y) = (D\Psi(\Psi^{-1}(x,y)))^{-1}$).

U und V sind dabei bis auf λ^2-Nullmengen gleich $\mathbb{R}^2$.

2. Es gilt

$$\psi(\lambda_U^2) = |\mathrm{det} D\Psi^{-1}|\lambda_V^2 = \frac{1}{|\mathrm{det} D\Psi(\Psi^{-1}(x,y))|}\lambda_V^2 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\lambda_V^2$$

3. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ messbar und beschränkt, $f = \mathcal{O}(\|x\|^\alpha)$ für $\|x\| \to \infty$. Letzteres bedeutet, dass $\exists\, C, R > 0$, sodass

$$|f(x)| \leq C\|x\|^\alpha \quad \forall\, \|x\| \geq R. \tag{1}$$

Aus der Beschränktheit von f folgt sofort dass $f\mathbf{1}_{\overline{U_R(0)}}$ integrierbar ist. Wegen 1 folgt die Integrierbarkeit von f dann aus der Integrierbarkeit von $g := C\|x\|^\alpha \mathbf{1}_{\mathbb{R}^2\setminus\overline{U_R(0)}}$ (integrierbare Majorante nach 1). g ist integrierbar, denn

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} g \, \mathrm{d}\lambda^2 &\overset{[1]}{=} \int_U (g \circ \Psi) \, |\mathrm{det} D\Psi| \, \mathrm{d}\lambda_U^2 = \int_U g(\Psi(r, \varphi)) \, r \, \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi \\
&\overset{[2]}{=} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} C r^\alpha r \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = 2\pi C \int_R^\infty r^{\alpha+1} \, \mathrm{d}r \\
&= 2\pi C \left[\frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]_R^\infty \overset{[3]}{=} -\frac{2\pi C R^{\alpha+2}}{\alpha+2} \in (0, \infty).
\end{aligned}$$

Dabei wurde bei [1] der Transformationssatz samt der Tatsache, dass U bis auf eine Nullmenge gleich $\mathbb{R}^2$ ist, verwendet. Bei [2] wird der Satz von Tonelli verwendet. Dieser wird im Nachhinein gerechtfertigt, denn [3] ist nur möglich, falls $\alpha < -2$ ist, nur dann ist der Ausdruck $< \infty$.

Aufgabe 10 (Transformation des Lebesgue-Maßes)**.** Zeigen Sie:
Für eine lineare Transformation $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^d$ dargestellt werde durch die Matrix $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist

$$f(\lambda^d) = |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_d|^{-1} \lambda^d.$$

1. elementar durch Auswerten an Quadern (HINWEIS: Definition des Bildmaßes).

2. mithilfe des Transformationssatzes.

Lösung. 1. f ist linear und damit messbar. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}^d$ ein abgeschlossener Quader, dann ist

$$\begin{aligned} A\lambda^d([a,b]) &= \lambda^d(A^{-1}[a,b]) = \lambda^d\left(\frac{1}{\alpha_1}[a_1,b_1] \times \frac{1}{\alpha_2}[a_2,b_2] \times \dots \times \frac{1}{\alpha_d}[a_d,b_d]\right) \\ &= \frac{1}{|\alpha_1| \dots |\alpha_d|} \lambda^d([a,b]) \end{aligned}$$

für alle $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$. Damit ist $f(\lambda^d) = |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_d|^{-1} \lambda^d$ gezeigt auf einem Erzeuger der Borel-Algebra $\mathcal{B}^d$, woraus die Gleichheit auf ganz $\mathcal{B}^d$ folgt.

2. Es ist $D(A^{-1}) = A^{-1}$. Nach dem Transformationssatz gilt dann

$$A(\lambda^d) = |\det(DA^{-1})| \lambda^d = |\det A|^{-1} \lambda^d = |\alpha_1 \cdot \dots \cdot \alpha_d|^{-1} \lambda^d$$

woraus die Behauptung folgt.