Übungsaufgaben zur Lebesgueschen Integrationstheorie

Tobias Ried

10. März 2011

Aufgabe 1 (Messbarkeit der Komposition zweier Abbildungen)**.** Seien $(X,\mathfrak{A})$, $(Y,\mathfrak{B})$ und $(Z,\mathfrak{C})$ Messräume und $f:(X,\mathfrak{A})\to(Y,\mathfrak{B})$, $g:(Y,\mathfrak{B})\to(Z,\mathfrak{C})$ messbar. Zeigen Sie, dass dann auch $f\circ g:(X,\mathfrak{A})\to(Z,\mathfrak{C})$ messbar ist.

Aufgabe 2 (Messbarkeit wichtiger Funktionen)**.** Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen. Zeigen Sie, dass dann auch $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$ und $\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ messbar sind.

Aufgabe 3 (Monotone Konvergenz)**.** Zeigen Sie:
Für alle $f\in E^*$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} n\int \log\left(1+\frac{1}{n}f\right)\,\mathrm{d}\mu = \int f\,\mathrm{d}\mu$$

Hinweis: Warum gilt $\left(1+\frac{1}{n}f\right)^n \uparrow_n \exp(f)$?

Aufgabe 4 (Integral auf $(\mathbb{N},\mathfrak{P}(\mathbb{N}),\mu)$)**.** Betrachten Sie den Maßraum $(\mathbb{N},\mathfrak{P}(\mathbb{N}),\mu)$ mit dem Zählmaß μ. Darauf sei eine messbare Funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(n)=: f_n$ definiert.

1. Begründen Sie
$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n.$$
2. Formulieren Sie für obiges Integral auf $(\mathbb{N},\mathfrak{P}(\mathbb{N}),\mu)$ den Satz zur majorisierten Konvergenz (ausgedrückt für Reihen).
3. Sei nun auf $(\mathbb{N},\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ ein anderes Maß ν definiert durch $\nu(\{n\}):=4^{-n}$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$ und die Funktion $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f_n=f(n)=(-3)^n$ gegeben. Ist ν normiert, also $\nu(\mathbb{N})=1$? Warum ist f integrierbar? Berechnen Sie
$$\int f\,\mathrm{d}\nu,\quad \int 1_{2\mathbb{N}} f\,\mathrm{d}\nu$$

Aufgabe 5 (Integrierbarkeit)**.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathbf{1}_{[n-1,n)}(x)$$

nicht Lebesgue-integrierbar ist. Wie ist dann die Gleichung

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \log 2$$

zu verstehen?
Hinweis: Wie sieht der Graph von f aus? Finden Sie einen einfachen Ausdruck für $|f|$ und zeigen Sie, dass $|f|$ nicht Lebesgue-integrierbar ist. Warum ist dann f nicht Lebesgue-integrierbar?

Aufgabe 6 (Integration bezüglich Maßen mit Dichten und Bildmaßen)**.** Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\mu := f(\lambda^2)$ das Bilmaß des 2-dimensionalen Lebesgue-Maßes unter f.

1. Warum ist f messbar?
2. Berechnen Sie $\mu([a, b])$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.
3. Bestimmen Sie eine Dichte ρ, sodass $\rho\lambda^1([a, b]) = \mu([a, b]) \; \forall \, a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.
4. Wie lautet die Radon-Nikodym Ableitung von μ bezüglich λ^1?

Aufgabe 7 (Integration bezüglich Maßen mit Dichten und Bildmaßen)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = \log |x|$, $f(0) := -\infty$.

1. Warum ist f messbar?
2. Sei $\mu := f(\lambda^1)$. Berechnen Sie $\mu([a, b])$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.
3. Sei $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\rho(x) = 2e^x$. Zeigen Sie: $\rho\lambda^1 = \mu$.
4. Wie lautet die Radon-Nikodym Ableitung von μ bezüglich λ^1?

Aufgabe 8 (Integrierbarkeit mit Fubini)**.** Zeigen Sie mithilfe des Satzes von Fubini, dass die Funktion

$$f(x, y) = \frac{x - y}{(x + y)^3}, \quad x, y > 0$$

nicht λ^2-integrierbar über der Menge $B = [0, 1]^2$ ist.

Aufgabe 9 (Ebene Polarkoordinaten und Integrierbarkeit)**.** Das 2-dim. Lebesgue-Maß λ^2 werde einer Transformation in ebene Polarkoordinaten unterworfen.

1. Geben Sie die Transformation Ψ (Definitionsbereich mit Begründung) samt Jacobimatrix $D\Psi$ und Funktionaldeterminante an.
2. Wie transformiert sich λ^2?
3. Gegeben sei nun zusätzlich eine messbare und beschränkte Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f = \mathcal{O}(\|x\|^\alpha)$ für $\|x\| \to \infty$. Zeigen Sie mit obiger Transformation, dass f integrierbar ist, falls $\alpha < -2$. Argumentieren Sie sauber, indem Sie die an den jeweiligen Stellen relevanten Sätze nennen!

Aufgabe 10 (Transformation des Lebesgue-Maßes)**.** Zeigen Sie:
Für eine lineare Transformation $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, die bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^d$ dargestellt werde durch die Matrix $A = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, ist

$$f(\lambda^d) = |\alpha_1 \cdot \cdots \cdot \alpha_d|^{-1} \lambda^d.$$

1. elementar durch Auswerten an Quadern (Hinweis: Definition des Bildmaßes).
2. mithilfe des Transformationssatzes.