Musterlösung

noch: Funktionentheorie

Aufgabe 2.5 (Holomorphe Stammfunktion)**.** Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$f_1(z) = \frac{1}{z+i}$$

eine Stammfunktion auf $K_2(i)$ besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie die Identität $f_1(z) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$. *Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass Potenzreihen in ihrem Konvergenzradius holomorph sind und gliedweise differnziert werden dürfen.*

(b) Folgern Sie, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ keine Stammfunktion besitzt, indem Sie f entlang einer passenden Kreislinie mit Mittelpunkt in i integrieren.

(c) Finden Sie zwei verschiedene Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, auf denen (die entsprechende Einschränkung von) f eine Stammfunktion besitzt.

Lösung. (a) Es gibt zwei mögliche Lösungen für diese Aufgabe. Zum Einen kann man die Funktionen mit Hilfe des Hinweises in eine Potenzreihe entwickeln und über gliedweises Integrieren eine Stammfunktion explizit angeben. Andererseits kann man auch schlichtweg Argumentieren, dass $K_2(i)$ ein Sterngebiet ist, auf dem $f_1(z)$ holomorph ist, sodass die Existenz einer Stammfunktion sich aus dem Cauchyschen Integralsatz ergibt.

(b) Es reicht uns zu zeigen, dass das Wegintegral über $\partial K_r(i)$ mir $0 < r < 2$ nicht null ergibt (müsste null ergeben, wenn f eine Stammfunktion hätte). Dazu zerlegen wir f zunächst in Partialbrüche.

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} = \frac{\frac{i}{2}}{z+i} + \frac{-\frac{i}{2}}{z-i}$$

Das Kreisintegral über den ersten Term ist, wie wir in der (a) gezeigt haben 0. Das Wegintegral über den zweiten Term hingegen, folgt aus Korollar 2.3 zu π.

(c) Zum Beispiel alle $K_r(0)$ mit $0 < r < 1$ und viele weitere.

□

Aufgabe 2.6 (Explizite Potenzreihenentwicklung)**.** Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{40}{(z^2+4)(z-4)}$$

in eine Potenzreihe um 0 und berechnen Sie den Konvergenzradius.

Lösung. Zunächst können wir die Partialbruchzerlegung durchführen:

$$f(z) = \frac{40}{(z^2+4)(z-4)} = \frac{-2z+8}{z^2+4} + \frac{2}{z-4} = \frac{-1-2i}{z+2i} + \frac{-1+2i}{z-2i} + \frac{2}{z-4}$$

$$\Leftrightarrow f(z) = \left(-\frac{1}{2}z - 2\right) \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{z^2}{4}\right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{4}}.$$

Diese beiden Therme kann man in jeweils eine geometrische Reihe entwickeln und erhält dadurch die Potenzreihe in der Form $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit den Entwicklungskoeffizienten

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}+1} + 2^{-n+1} - 2^{-2n-1} & n \text{ ungerade;} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}} 2^{-n} - 2^{-2n-1} & n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Mit der Formel von Cauchy-Haddamard erhalten wir als Konvergenzradius 2. □

Aufgabe 2.7 (Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf ein reelles Integral)**.** Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

Betrachten Sie das Integral über die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ über den Rand eines Halbkreisrings mit Außenradius r und Innenradius $\frac{1}{r}$ $(r > 0)$, der in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird, und bilden Sie den Grenzwert $r \to \infty$.

Hinweis 1: $\lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi} e^{-R\sin(t)}\, dt = 0$
Hinweis 2: Durch Einsetzen der Exponentialreihe kann man zeigen, dass es eine ganze Funktion ϕ mit der Eigenschaft gibt, dass $e^{iz} = \frac{1}{z} + \phi(z)$ für alle $z \neq 0$.

Lösung. Der Integrationsweg ergibt sich durch Hintereinanderdruchlaufen der folgenden vier Integrationswege.

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= t & t &\in \left[\frac{1}{r}, r\right] \\ \gamma_2(t) &= re^{it} & t &\in [0, \pi] \\ \gamma_3(t) &= t & t &\in \left[r, \frac{1}{r}\right] \\ \gamma_4(t) &= \frac{1}{r} e^{i(\pi - t)} & t &\in [0, \pi] \end{aligned}$$

Mit Hinweis 1 sehen wir

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\ dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{e^{ir(\cos(t)+i\sin(t))}}{re^{it}} \cdot ire^{it}\ dt\right| = \left|i\int_0^\pi e^{ir\cos(t)-r\sin(t)}\ dt\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_0^\pi e^{-r\sin(t)}\ dt\right| \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Für die Integration über γ_4 können wir Hinweis 2 benutzen

$$\int_{\gamma_4} f(z)\,dz = \int_{\gamma_4} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_4} \phi(z)\,dz = \underbrace{\int_0^\pi \frac{1}{\frac{1}{r}e^{i(\pi-t)}} \cdot \frac{-i}{r} e^{i(\pi-t)}\ dt}_{=-i} + \underbrace{\int_{\gamma_4} \phi(z)\ dz}_{\leq \max_{z\in K_{\frac{1}{r}(0)}} |\phi(z)| \int_{\gamma_4}\ dz} \leq$$

$$\leq -i\pi + \frac{\pi}{r} \max_{z\in K_{\frac{1}{r}(0)}} |\phi(z)| \stackrel{r\to\infty}{\longrightarrow} -i\pi.$$

Nahc dem Cauchyschen Integralsatz gilt

$$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\gamma_2} f(z)\ dz + \int_{\gamma_3} f(z)\ dz + \int_{\gamma_4} f(z)\ dz = 0,$$

also

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz}}{z}\ dz = \lim_{r\to\infty} \left[\int_{\gamma_1} f(z)\ dz + \int_{\gamma_3} f(z)\ dz\right] = -\left[\int_{\gamma_2} f(z)\ dz + \int_{\gamma_4} f(z)\ dz\right] = i\pi.$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(x)}{x}\ dx = \Im\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iz}}{z}\ dz\right) = \pi.$$

□

Aufgabe 2.8 (Pole)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie

(a) Wenn f nicht die Nullfunktion ist und in $z_0 \in U$ eine Nullstelle hat, dann hat die Funktion

$$g(z) : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$$

eine hebbare Singularität in z_0.

(b) Die Funktion f hat in c genau dann einen Pol m-ter Ordnung, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z\to c, z\neq c} (z-c)^m f(z)$$

existiert und von Null verschieden ist.

Lösung. (a) Entwickle f in eine Potenzreihe um z_0.

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n ,$$

weil $f(z_0) = 0$. Das bedeutet für g

$$g(z) = \frac{1}{z - z_0} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!} (z - z_0)^n .$$

Das ist wieder eine reguläre Potenzreihe mit demselben Konvergenzradius wie die Potenzreihenentwicklung von f. Weil Potenzreihe im Konvergenzradius holomorph sind, folgt aus der Existenz dieser Potenzreihendarstellung, dass f in z_0 eine hebbare Singularität hat.

(b) Aus der Existenz des Grenzwert folgt, dass die Funktion an der Stelle c stetig fortgesetzt werden kann. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz folgt daraus, dass die stetige Fortsetzung von f sogar holomorph ist. Für $k \leq m$ gilt

$$\lim_{z \to c, z \neq c} (z - c)^{m-k} f(z) = \lim_{z \to c, z \neq c} \frac{(z - c)^m f(z)}{(z - c)^k} \to \infty.$$

Daraus folgt nach Definition eines Pols, dass wir in c einen Pol m-ter Ordnung haben.

□

Aufgabe 2.9 (Laurententwicklung)**.** Bestimmen Sie die Laurententwicklung der folgenden Funktionen $f_{1,2} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ jeweils in der isolierten Singularität 0.

(a) $f_1(z) = \frac{z-4}{z^2(z+4)}$

(b) $f_2(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

Lösung. (a) Die Laurentreihenentwicklung lässt sich bei dieser Funktion auf einfache Weise durch geeignetes Einsetzen der geometrischen Reihe berechnen.

$$f_1(z) = \frac{z-4}{z^2(z+4)} = (z-4) \cdot \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z+4} = (z-4) \cdot \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} z^n =$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}} z^n - \sum_{n=-2}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+2} z^n.$$

(b) Bei dieser Funktion können wir die Laurententwicklung leicht aus der Potenzreihendarstellung des Sinus herleiten.

$$f_2(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+1}(2n+1)!} = \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(1-2n)!}$$

$\square$

Aufgabe 2.10 (Anwendung des Residuensatzes)**.** Zeigen Sie

(a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx = \frac{\pi}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Lösung. (a) Es ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = \Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz\right) = \Re\left(2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f;i)\right),$$

dabei haben wir Korollar 2.7 benutzt mit $c = i$ als einziges Residuum in der oberen Halbebene.

$$\operatorname{Res}(f;i) = \frac{1}{2ei} \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz = \frac{\pi}{e}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = \Re\left(\frac{\pi}{e}\right) = \frac{\pi}{e}.$$

Analog dazu

$$\frac{x\sin(x)}{x^2+1}\, dx = \Im\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}\, dz\right) = \Im\left(2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f;i)\right).$$

$$\operatorname{Res}(f;i) = \frac{1}{2e} \quad \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}\, dz = \frac{i\pi}{e}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}\, dx = \Im\left(\frac{i\pi}{e}\right) = \frac{\pi}{e}.$$

(b) Der Integrand hat Pole $(n+1)$-Ordnung bei $\pm i$. Wir können also mit $\varphi(z) = (z+i)^{n+1}f(z)$ eine auf der oberen Halbebene holomorphe Funktion. Daraus ergibt sich

$$\mathrm{Res}(f;i) = \frac{\varphi^{(n)}(i)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1} i}.$$

Und somit bekommen wir mit Korollar 2.7

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\,dx = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}(f;i) = 2\pi i \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1} i} = \frac{\pi}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

□

Aufgabe 2.11 (Fouriertransformation)**.** Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2+\epsilon^2}$$

mit $\epsilon > 0$.

Lösung. Die Fourier-Transformierte ist definiert als

$$f(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ikx}}{x^2+\varepsilon^2}\,dx.$$

Wir benutzen wieder Korollar 2.7, wobei wir hier zu achten haben, dass wir ein negatives $\alpha = -k$ haben und daher über die untere Halbebene die Residuen summieren müssen (ansonsten würde die komplexe Exponentialfunktion bei den Integralen über die obere Halbene wegen der großen positiven Imaginärteile unendlich werden). In der unteren Halbebene haben wir nur $-i\varepsilon$ als Residuum

$$f(k) = \sqrt{2\pi} i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-ikz}}{z^2+\varepsilon^2}; -i\varepsilon\right) = \sqrt{2\pi} i \cdot \frac{e^{-k\varepsilon}}{-2i\varepsilon} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{-k\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

Analog dazu, müssen wir für $k < 0$ über die Residuen in der oberen Halbebene summieren. Das einzige Residuum in der oberen Halbebene ist $i\varepsilon$. Wir bekommen

$$f(k) = \sqrt{2\pi} i \mathrm{Res}\left(\frac{e^{-ikz}}{z^2+\varepsilon^2}; i\varepsilon\right) = \sqrt{2\pi} i \cdot \frac{e^{k\varepsilon}}{2i\varepsilon} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{e^{k\varepsilon}}{\varepsilon}.$$

□

Aufgabe 2.12 (Gibt's oder gibt's nicht?)**.** Geben Sie ein Beispiel oder einen Gegenbeweis für die Existenz der folgenden Objekte.

(a) eine nichtkonstante, reell differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft, dass die durch $u(x,y) := \Re(f(x+iy))$, $v(x,y) := \Im(f(x+iy))$ definierten Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Differentialgleichungen $\partial_x u = -\partial_y v$ und $\partial_x v = \partial_y u$ erfüllen

(b) eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die nicht wegunabhängig integrierbar ist

(c) ein Gebiet $U \to \mathbb{C}$ mit $0 \in U$ und darauf eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, deren Potenzreihenentwicklung im Punkt 0 den Konvergenzradius 1 hat

(d) eine nichtkonstante, beschränkte Funktion f, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist

Lösung. (a) Ja, zum Beispiel die komplexe Konjugationsfunktion $f_1(z) = \overline{z}$.

(b) Nein, weil die obere bzw. die untere Halbebene jeweils Sterngebiete sind.

(c) Ja, zum Beispiel $f_2(z) = \frac{1}{1-z}$.

(d) Ja, zum Beispiel $f_3(z) = \sin(|z|)$.

□

Aufgabe 2.13 (Wahr oder Falsch?). Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion.

(b) Es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-6\cos(t)+9} = \frac{\pi}{4}$

(c) Die komplexen Sinus- und Cosinusfunktionen sind surjektiv.
Hinweis: Jedes Polynom über $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.

Lösung. (a) Nein, zum Beispiel die komplexe Konjugation $f_1(z) = \overline{z}$ nicht.

(b) Ja. Mit den Bezeichungen von Korollar 2.7 ist $f(z) = \frac{1}{1-6x+9}$ und $F(z) = \frac{1}{(z-3)(1-3z)}$. Der einzige Pol von F in $K_1(0)$ ist $z = \frac{1}{3}$, ein Pol 1. Ordnung mit $Res\left(F; \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{\frac{1}{3}-3}}{-3} = \frac{1}{-1+9} = \frac{1}{8}$.

(c) Ja. Mit $c := e^{iz}$ ist die Gleichung $\cos(z) = w$ äwuivalent zu $c^2 - 2wc + 1 = 0$ (für $\sin(z)$: $c^2 - 2wc - 1 = 0$). Diese Gleichungen haben nach dem Fundamentalsatz der Algebra Lösungen, die nicht gleich null sind. Mit der surjektiv der e-Funktion folgt dann, dass sin und cos surjektiv sind.

□