Übung

noch: Funktionentheorie

Aufgabe 2.5 (Holomorphe Stammfunktion)**.** Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$f_1(z) = \frac{1}{z+i}$$

eine Stammfunktion auf $K_2(i)$ besitzt.

Hinweis: Zeigen Sie die Identität $f_1(z) = \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$. *Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass Potenzreihen in ihrem Konvergenzradius holomorph sind und gliedweise differnziert werden dürfen.*

(b) Folgern Sie, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ keine Stammfunktion besitzt, indem Sie f entlang einer passenden Kreislinie mit Mittelpunkt in i integrieren.

(c) Finden Sie zwei verschiedene Teilmengen von $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$, auf denen (die entsprechende Einschränkung von) f eine Stammfunktion besitzt.

Aufgabe 2.6 (Explizite Potenzreihenentwicklung)**.** Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{40}{(z^2+4)(z-4)}$$

in eine Potenzreihe um 0 und berechnen Sie den Konvergenzradius.

Aufgabe 2.7 (Anwendung des Cauchyschen Integralsatzes auf ein reelles Integral)**.** Zeigen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \pi.$$

Betrachten Sie das Integral über die Funktion $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ über den Rand eines Halbkreisrings mit Außenradius r und Innenradius $\frac{1}{r}$ $(r > 0)$, der in mathematisch positiver Richtung durchlaufen wird, und bilden Sie den Grenzwert $r \to \infty$.

Hinweis 1: $\lim_{R\to\infty} \int_0^\pi e^{-R\sin(t)}\, dt = 0$
Hinweis 2: Durch Einsetzen der Exponentialreihe kann man zeigen, dass es eine ganze Funktion ϕ *mit der Eigenschaft gibt, dass* $e^{iz} = \frac{1}{z} + \phi(z)$ *für alle* $z \neq 0$.

Aufgabe 2.8 (Pole)**.** Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie

(a) Wenn f nicht die Nullfunktion ist und in $z_0 \in U$ eine Nullstelle hat, dann hat die Funktion
$$g(z) : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$$
eine hebbare Singularität in z_0.

(b) Die Funktion f hat in c genau dann einen Pol m-ter Ordnung, wenn der Grenzwert
$$\lim_{z\to c, z\neq c} (z-c)^m f(z)$$
existiert und von Null verschieden ist.

Aufgabe 2.9 (Laurententwicklung)**.** Bestimmen Sie die Laurententwicklung der folgenden Funktionen $f_{1,2} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ jeweils in der isolierten Singularität 0.

(a) $f_1(z) = \frac{z-4}{z^2(z+4)}$

(b) $f_2(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

Aufgabe 2.10 (Anwendung des Residuensatzes)**.** Zeigen Sie

(a)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+1}\, dx = \frac{\pi}{e}$$

(b) Für $n \in \mathbb{N}$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx = \frac{\pi}{2^{2n}} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

Aufgabe 2.11 (Fouriertransformation)**.** Berechnen Sie die Fouriertransformierte der Funktion
$$f(x) = \frac{1}{x^2+\epsilon^2}$$
mit $\epsilon > 0$.

Aufgabe 2.12 (Gibt's oder gibt's nicht?)**.** Geben Sie ein Beispiel oder einen Gegebnbeweis für die Existenz der folgenden Objekte.

(a) eine nichtkonstante, reell differenzierbare Funktion f mit der Eigenschaft, dass die durch $u(x,y) := \Re(f(x+iy))$, $v(x,y) := \Im(f(x+iy))$ definierten Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an jeder Stelle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ die Differentialgleichungen $\partial_x u = -\partial_y v$ und $\partial_x v = \partial_y u$ erfüllen

(b) eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die nicht wegunabhängig integrierbar ist

(c) ein Gebiet $U \to \mathbb{C}$ mit $0 \in U$ und darauf eine nichtkonstante holomorphe Funktion $f : U \to \mathbb{C}$, deren Potenzreihenentwicklung im Punkt 0 den Konvergenzradius 1 hat

(d) eine nichtkonstante, beschränkte Funktion f, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert ist

Aufgabe 2.13 (Wahr oder Falsch?)**.** Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Jede stetige Funktion hat eine Stammfunktion.

(b) Es gilt $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{1-6\cos(t)+9} = \frac{\pi}{4}$

(c) Die komplexen Sinus- und Cosinusfunktionen sind surjektiv.
Hinweis: Jedes Polynom über $\mathbb{C}$ hat eine Nullstelle.