Musterlösung

1 Hilberträume

Aufgabe 1.1 (Hilberträume)**.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $V \subset \mathcal{H}$ ein beliebiger Unterraum. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen zutreffen:

☒ Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ erfüllt die Parallelogrammgleichung $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle \\ &\quad + \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle - \langle y,x\rangle - \langle x,y\rangle \\ &= 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) \end{aligned}$$

□

☐ $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$
Die eindeutige Zerlegung $\mathcal{H} \ni x = v + v^\perp$ mit $v \in V$, $v^\perp \in V^\perp$ existiert laut Projektionssatz nur, falls V *abgeschlossener* Unterraum ist.

☐ In V gilt der Projektionssatz.
V ist nicht abgeschlossen.

☒ In $V^\perp$ gilt der Projektionssatz.
$V^\perp$ ist abgeschlossen (siehe Aufgabe 2).

☐ Jede Cauchyfolge in V konvergiert in V.
V ist nicht abgeschlossen, also auch nicht vollständig.

☒ $V^\perp$ ist ein Hilbertraum.
$V^\perp$ ist abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$, also selbst vollständig und damit (mit dem auf $V^\perp$ eingeschränkten Skalarprodukt) ein Hilbertraum.

☒ $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ für alle $x,y \in \mathcal{H}$.
Es handelt sich hierbei um die Cauchy-Bunjakovski-Schwarz Ungleichung, die für Skalarprodukte gültig ist.

Sei nun $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.

☒ $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}^\perp = \{0\}$.
Es ist $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}} = \mathcal{H}$ und damit $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}^\perp = \mathcal{H}^\perp = \{0\}$.

☐ Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.
Es gilt nach Pythagoras (e_n's orthogonal): $\|e_n - e_m\|^2 = \|e_n\|^2 + \|e_m\|^2 = 2$ für alle $n \neq m$. Daher ist $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge und somit nicht konvergent.

Aufgabe 1.2 (Abgeschlossenheit des orthogonalen Komplements)**.**
Sei $M \subset \mathcal{H}$ Teilmenge eines Hilbertraumes, $V \subset \mathcal{H}$ ein Unterraum. Zeigen Sie:

(a) Das orthogonale Komplement $M^\perp$ von M ist abgeschlossen. Nehmen Sie sich dazu eine in $\mathcal{H}$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen aus $M^\perp$ und zeigen Sie, dass der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ wieder in $M^\perp$ liegt.

Hinweis: Verwenden Sie an geeigneter Stelle die Cauchy-Bunjakowski-Schwarz Ungleichung oder die Stetigkeit des Skalarprodukts.

(b) $M^\perp = (\overline{M})^\perp$

(c) $(V^\perp)^\perp = \overline{V}$

Hinweis: Benutzen Sie den Projektionssatz.

(d) Seien $A, B \subset \mathcal{H}$ mit $A \subset B$. Dann ist $B^\perp \subset A^\perp$.

Beweis.
(a) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge in $M^\perp$ mit $x_n \to x$ $(n \to \infty)$. Zeige $x \in M^\perp$.
Es gilt $\forall y \in M$:

$$\langle x, y\rangle = \langle \lim_{n\to\infty} x_n, y\rangle \overset{(\star)}{=} \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y\rangle = 0,$$

wobei bei $(\star)$ die Stetigkeit des Skalarproduktes ausgenutzt wurde. Dies bedeutet aber , dass $x \in M^\perp$.
Alternativ: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie oben, $y \in M$ beliebig.

$$\langle x, y\rangle = \langle x - x_n, y\rangle + \underbrace{\langle x_n, y\rangle}_{=0} = \langle x - x_n, y\rangle,$$

da $x_n \in M^\perp$ $\forall n$. Nun ist aber nach Cauchy-Bunjakovski-Schwarz

$$|\langle x, y\rangle| = |\langle x - x_n, y\rangle| \leq \|x - x_n\|\|y\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und damit $x \in M^\perp$.

(b) "$\subset$": Sei $x \in M^\perp$, dann ist $\langle x, y\rangle = 0\,\forall y \in M$. Wähle eine beliebige Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit $z_n \to z$ $(n \to \infty)$, dann ist $z \in \overline{M}$ und es gilt wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts

$$\langle x, z\rangle = \langle x, \lim_{n\to\infty} z_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, z_n\rangle = 0.$$

Damit ist $\langle x, y\rangle = 0\,\forall y \in \overline{M}$, also $x \in (\overline{M})^\perp$.
"$\supset$": Sei nun $x \in \overline{M}^\perp$, dann $\langle x, y\rangle = 0\,\forall y \in \overline{M}$. Wegen $M \subset \overline{M}$ sieht man sofort $\langle x, \tilde{y}\rangle = 0\,\forall \tilde{y} \in M$ und damit $x \in M^\perp$.

(c)"$\subset$": Sei $x \in (V^\perp)^\perp$, dann $\langle x, y\rangle = 0\,\forall y \in V^\perp$. Nun ist $\overline{V}$ abgeschlossen und man kann den Projektionssatz anwenden: $x = w + w'$ mit $w \in \overline{V}$ und $w' \in \overline{V}^\perp = V^\perp$. Also ist

$$0 = \langle x, y\rangle = \langle w + w', y\rangle = \underbrace{\langle w, y\rangle}_{=0} + \langle w', y\rangle$$

Damit gilt $\langle w', y\rangle = 0\,\forall y \in V^\perp$, was aber $w' \in (V^\perp)^\perp$ impliziert, mit obiger Zerlegung $w' \in V^\perp \cap (V^\perp)^\perp = \{0\}$ und somit $w' = 0$. Dies bedeutet aber $x = w \in \overline{V}$.
"$\supset$": Sei $x \in \overline{V}$, dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in V mit $x_n \to x$. Es gilt $\langle x_n, y\rangle = 0\,\forall y \in V^\perp$, damit ist $x_n \in (V^\perp)^\perp\ \forall n$. Aus $(V^\perp)^\perp$ abgeschlossen (siehe (a)) folgt dann die Behauptung.

(d) Sei $x \in B^\perp$, dann ist $\langle x, y\rangle = 0 \forall y \in B$. Aus $A \subset B$ folgt sofort $\langle x, y\rangle = 0 \forall y \in A$ und damit $x \in A^\perp$.

$\square$

Aufgabe 1.3 (Polarisierungsgleichung)**.** Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Beweisen Sie die Polarisierungsgleichung

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\{\zeta\in\mathbb{K}:\, \zeta^4=1\}} \zeta \, \|\zeta x + y\|^2$$

für

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Beweis. (a) In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung $\zeta^4 = 1$ die beiden Lösungen $\zeta_{1,2} = \pm 1$. Damit ist zu zeigen

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2\right)$$

Der Beweis erfolgt nun durch einfaches Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle -x+y, -x+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\
&\quad - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\
&= 4\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

Dabei wurde im letzten Schritt die Symmetrie des Skalarprodukts in einem $\mathbb{R}$-VR ausgenutzt, sowie in den vorhergehenden Schritten die Bilinearität.

(b) In $\mathbb{C}$ hat die Gleichung $\zeta^4 = 1$ die vier Lösungen $\zeta_{1,2} = \pm 1$ und $\zeta_{3,4} = \pm i$. Damit ist zu zeigen

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\underbrace{\left(\|x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|-ix+y\|^2\right)}_{(\star)}$$

Einsetzen liefert:

$$\begin{aligned}
(\star) &= \langle x+y, x+y\rangle - \langle -x+y, -x+y\rangle + i\langle ix+y, ix+y\rangle - i\langle -ix+y, -ix+y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle - \langle x,x\rangle - \langle y,y\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle \\
&\quad + i(\underbrace{\langle ix, ix\rangle}_{=\langle x,x\rangle} + \langle y,y\rangle + \langle ix,y\rangle + \langle y, ix\rangle) \\
&\quad - i(\underbrace{\langle -ix, -ix\rangle}_{=\langle x,x\rangle} + \langle y,y\rangle + \langle -ix,y\rangle + \langle y, -ix\rangle) \\
&= 2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle + i\langle ix,y\rangle + i\langle y,ix\rangle - i\langle -ix,y\rangle - i\langle y,-ix\rangle \\
&= 2\langle x,y\rangle + 2\langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle \\
&= 4\langle x,y\rangle
\end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt wurde die *Sesquilinearität* (Linearität in der 2. Komponente, konjugierte Linearität in der 1. Komponente) verwendet. □

Aufgabe 1.4. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum.

1. Geben Sie eine konvergente Orthogonalfolge in $\mathcal{H}$ an. Überlegen Sie sich dazu, was die Separabilität von $\mathcal{H}$ impliziert.

2. Die eben gefundene Folge werde mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Geben Sie $\|\sum_{k=0}^N a_k\|$ an.

Lösung. (a) $\mathcal{H}$ separabel bedeutet, dass es eine abzählbar dichte Teilmenge von $\mathcal{H}$ gibt. Mittels Gram-Schmidt-Orthonormierungsverfahren lässt sich daraus eine Orthonormalbasis konstruieren. Bezeichne diese ONB als $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist die Folge mit $a_n := \frac{1}{n}e_n \; \forall n \in \mathbb{N}$ eine Orthogonalfolge mit Grenzwert 0. Dies sieht man aus

$$\|a_n\| = \frac{1}{n}\underbrace{\|e_n\|}_{=1} = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) Nach dem Satz von Pythagoras gilt ((a_n) Orthogonalfolge!)

$$\left\|\sum_{k=0}^N a_k\right\| = \sqrt{\sum_{k=0}^N \|a_k\|^2}.$$

□

2 Funktionentheorie

Aufgabe 2.1 (Komplexe Konjugation)**.** Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation $\Sigma(z) = \overline{z}$ nirgends komplex differenzierbar ist, indem Sie

(a) die Funktion direkt in Definition der komplexen Differenzierbarkeit einsetzen

(b) die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen darauf anwenden.

Lösung. (a) Für ein beliebiges aber festes z_0 betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\overline{z_0 + h} - \overline{z_0}}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\overline{h}}{h}.$$

Auf der reellen Achse $\left(\overline{h} = h\right)$ erhalten wir als Grenzwert

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\overline{h}}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Auf der imaginären Achse $\left(\overline{h} = -h\right)$ erhalten wir andererseits

$$\lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{\overline{h}}{h} = \lim_{h\to 0, h\neq 0} \frac{-h}{h} = -1 \neq 1.$$

Also exisitiert der Grenzwert für kein $z_0 \in \mathbb{C}$.

(b) Noch schneller erhalten wir das gleiche Resultat mit Hilfe der Cauchy-Riemann-gleichungen.

$$\Sigma(x+iy) = x + i(-y) = u(x,y) + iv(x,y)$$
$$\Rightarrow \partial_x u(x,y) = 1 \neq \partial_y v(x,y).$$

□

Aufgabe 2.2 (Komplexe Differentierbarkeit)**.** Untersuchen Sie, in welchen Punkten $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit reellen Koordinaten x, y die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind, die durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben werden. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $U \subseteq C$ an, auf dem die Funktionen holomorph sind.

(a) $f_1(z) := x^2 + iy^2$

(b) $f_2(z) := 2xy - i(x^2 - y^2)$

Lösung. (a) Wir benutzen wieder die Cauchy-Riemann-Gleichungen.

$$f_1(z) := \underbrace{x^2}_{u(x,y)} + \underbrace{iy^2}_{iv(x,y)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_x u(x,y) = 2x \quad \partial_y u(x,y) = 0 \\ \partial_x v(x,y) = 0 \quad \partial_y v(x,y) = 2y \\ \Rightarrow x = y \end{aligned}$$

das heißt die Cauchy-Riemann-Gleichungen sind nur auf einer Geraden in der komplexen zahlenebene erfüllt. Eine Gerade ist selbst keine offene Menge in $\mathbb{C}$ und enthält auch keine nichtleere offene Menge. Das heißt die Funktion f_1 ist nirgends holomorph. Das heißt allerdings nicht, dass f_1 nirgends komplex differnzierbar ist. Das ist sie nämlich genau auf allen Punkte dieser Gerade $x = y$.

(b)
- **Variante 1:** Wir sehen, dass $f_2(z) = -iz^2$ (*Vorsicht*: $z^2 \neq |z|^2$) und erhalten, dass f_2 holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.
- **Variante 2:** Wir wenden wieder die Cauchy-Riemann-Gleichungen an.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \partial_x u(x,y) = 2y \quad \partial_y u(x,y) = 2x \\ \partial_x v(x,y) = -2x \quad \partial_y v(x,y) = 2y \\ \Rightarrow \partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y) \quad \partial_y u(x,y) = -\partial_x u(x,y) \end{aligned}$$

□

Aufgabe 2.3 (Kurvenintegral einer reellen positiven Funktion)**.** Sei $Q \subset \mathbb{C}$ das Quadrat mit den Eckpunkten $0, 1, i, 1+i$. Berechnen sie das Kurvenintegral über die Funktion $f(z) = |z|^2$ entlang der Kanten des Quadrats.
Hinweis: Achten Sie auf die richtige Orientierung des Integrationswegs.

Lösung. Die Kurve wird einmal in mathematisch positiver Richtung umlaufen (Gegen den Uhrzeigersinn). Wir können den Rand durch vier stückweise stetig-differenzierbare Kurven (Geraden) darstellen.

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= t, \quad t \in [0;1], \quad \gamma'(t) = 1 \\
\gamma_2(t) &= 1 + it, \quad t \in [0;1], \quad \gamma'(t) = i \\
\gamma_3(t) &= (1-t) + i, \quad t \in [0;1], \quad \gamma'(t) = -1 \\
\gamma_4(t) &= i(1-t), \quad t \in [0;1], \quad \gamma'(t) = -i
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir mit der Formel für komplexe Integrale die vier Integrale über die einzelnen Kanten.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\gamma_1} |z|^2 \, dz = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} \\
I_2 &= \int_{\gamma_2} |z|^2 \, dz = \int_0^1 i(1+t^2) dt = i\frac{4}{3} \\
I_3 &= \int_{\gamma_3} |z|^2 \, dz = \int_0^1 2(t-1) - t^2 dt = -\frac{4}{3} \\
I_4 &= \int_{\gamma_4} |z|^2 \, dz = \int_0^1 -i(1-t)^2 dt = -i\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Wir erhalten das Gesamte Integrale, indem wir über die einzelnen Teile summieren.

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = -1 + i.$$

Dieses Ergebnis ist auf den ersten Blick etwas verblüffend. Wir haben eine positive reelle Funktion über einen Bereich der Gaußschen Zahlenebene mit positivem Real- und Imaginärteil integriert und erhalten ein komplexes Ergebnis mit negativem Realteil. □

Aufgabe 2.4 (Komplexes Kurvenintegral und Flächeninhalt)**.** Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial M} \overline{z} \, dz$$

wobei ∂M der Rand der zwei nachfolgend angegebenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist. Es gelten die Orientierungsvereinbarungen aus der Vorlesung. Vergleichen Sie anschließend den Realteil Ihrer Lösung mit dem Flächeninhalt des von γ berandeten Gebietes.

(a) $M_1 = K_r(c)$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$

(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \,|1 < |z| < 2, \Im(z) > 0\}$ (Halbring).

Lösung. (a) Wir können die Integrale direkt berechnen. Unter Beachtung der Orientierungsregeln ist γ zum Beispiel durch $\gamma(t) = c + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$ mit $\gamma'(t) = ire^{it}$ gegeben. Dann ist

$$\frac{1}{2i}\int_{\partial K_r(c)} \overline{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \overline{c + re^{it}} ire^{it}\,dt = \frac{r}{2}\int_0^{2\pi} \overline{c}e^{it} + r\,dt = \frac{r}{2}\left(\frac{\overline{c}}{i} - \frac{\overline{c}}{i} + 2\pi r\right) = \pi r^2.$$

Das entspricht genau der Kreisfläche.

(b) Man erhält γ, indem man hintereinander die Kurven γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 durchläuft mit (jeweils $t \in [0; 1]$)

$$\gamma_1(t) = 1 + t; \quad \gamma_2(t) = 2e^{i\pi t}; \quad \gamma_3(t) = -2 + t; \quad \gamma_4(t) = -e^{-\pi i t};$$

Die zugehörigen Integrale lauten

$$I_1 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_1} \overline{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int_0^1 1 + t\,dt = -\frac{3i}{4}$$
$$I_2 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_2} \overline{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int_0^1 2e^{-i\pi t}\left(i2\pi e^{i\pi t}\right)\,dt = 2\pi$$
$$I_3 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_3} \overline{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int_0^1 -2 + t\,dt = \frac{3i}{4}$$
$$I_4 = \frac{1}{2i}\int_{\gamma_4} \overline{z}\,dz = \frac{1}{2i}\int_0^1 -e^{\pi i t}\left(i\pi e^{-i\pi t}\right)\,dt = -\frac{\pi}{2}$$

Für das Gesamtintegral erhalten wir $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{3}{2}\pi$. Der Flächeninhalt eines Halbrings ergibt sich als die Hälfte aus der Differenz aus der Fläche eines Kreises mit dem Radius gleich dem Außenradius des Halbrings und eines Kreises mit dem Radius gleich dem Innenradius des Halbrings $A = \frac{1}{2}\left(\pi \cdot 2^2 - \pi \cdot 1^2\right) = \frac{3}{2}\pi$.
Es ist kein Zufall, das in beiden Fällen der Wert des Kurvenintegrals gleich dem Inhalt der umrandeten Fläche ist. Man kann zeigen, dass das Integral über die komplexe Konjugationsfunktion bei geschlossenen Kurven stets einen positiven reellen Wert hat, diesen Wert kann man über die Leibnizschen Sektorformel mit dem Flächeninhalt der von der Kurve begrenzten Fläche identifizieren. □