Übung

1 Hilberträume

Aufgabe 1.1 (Hilberträume)**.** Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $V \subset \mathcal{H}$ ein beliebiger Unterraum. Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen zutreffen:

- ☐ Die durch das Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\| := \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ erfüllt die Parallelogrammgleichung $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.
- ☐ $\mathcal{H} = V \oplus V^\perp$
- ☐ In V gilt der Projektionssatz.
- ☐ In $V^\perp$ gilt der Projektionssatz.
- ☐ Jede Cauchyfolge in V konvergiert in V.
- ☐ $V^\perp$ ist ein Hilbertraum.
- ☐ $|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$ für alle $x,y \in \mathcal{H}$.

Sei nun $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$.

- ☐ $\overline{\operatorname{span}\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}}^\perp = \{0\}$.
- ☐ Die Folge $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 1.2 (Abgeschlossenheit des orthogonalen Komplements)**.**
Sei $M \subset \mathcal{H}$ Teilmenge eines Hilbertraumes, $V \subset \mathcal{H}$ ein Unterraum. Zeigen Sie:

(a) Das orthogonale Komplement $M^\perp$ von M ist abgeschlossen. Nehmen Sie sich dazu eine in $\mathcal{H}$ konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Elementen aus $M^\perp$ und zeigen Sie, dass der Grenzwert $x := \lim_{n\to\infty} x_n$ wieder in $M^\perp$ liegt.

Hinweis: Verwenden Sie an geeigneter Stelle die Cauchy-Bunjakowski-Schwarz Ungleichung oder die Stetigkeit des Skalarprodukts.

(b) $M^\perp = (\overline{M})^\perp$

(c) $(V^\perp)^\perp = \overline{V}$

Hinweis: Benutzen Sie den Projektionssatz.

(d) Seien $A, B \subset \mathcal{H}$ mit $A \subset B$. Dann ist $B^\perp \subset A^\perp$.

Aufgabe 1.3 (Polarisierungsgleichung)**.** Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Beweisen Sie die Polarisierungsgleichung

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4} \sum_{\{\zeta\in\mathbb{K}:\,\zeta^4=1\}} \zeta \, \|\zeta x + y\|^2$$

für

(a) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Aufgabe 1.4. Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum.

1. Geben Sie eine konvergente Orthogonalfolge in $\mathcal{H}$ an. Überlegen Sie sich dazu, was die Separabilität von $\mathcal{H}$ impliziert.
2. Die eben gefundene Folge werde mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Geben Sie $\|\sum_{k=0}^{N} a_k\|$ an.

2 Funktionentheorie

Aufgabe 2.1 (Komplexe Konjugation)**.** Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation $\Sigma(z) = \overline{z}$ nirgends komplex differenzierbar ist, indem Sie

(a) die Funktion direkt in Definition der komplexen Differenzierbarkeit einsetzen

(b) die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen darauf anwenden.

Aufgabe 2.2 (Komplexe Differentierbarkeit)**.** Untersuchen Sie, in welchen Punkten $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit reellen Koordinaten x, y die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind, die durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben werden. Geben Sie den maximalen Definitionsbereich $U \subseteq C$ an, auf dem die Funktionen holomorph sind.

(a) $f_1(z) := x^2 + iy^2$

(b) $f_2(z) := 2xy - i(x^2 - y^2)$

Aufgabe 2.3 (Kurvenintegral einer reellen positiven Funktion)**.** Sei $Q \subset \mathbb{C}$ das Quadrat mit den Eckpunkten $0, 1, i, 1 + i$. Berechnen sie das Kurvenintegral über die Funktion $f(z) = |z|^2$ entlang der Kanten des Quadrats.
Hinweis: Achten Sie auf die richtige Orientierung des Integrationswegs.

Aufgabe 2.4 (Komplexes Kurvenintegral und Flächeninhalt)**.** Berechnen Sie das komplexe Kurvenintegral

$$\frac{1}{2i} \int_{\partial M} \overline{z}\, dz$$

wobei ∂M der Rand der zwei nachfolgend angegebenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ ist. Es gelten die Orientierungsvereinbarungen aus der Vorlesung. Vergleichen Sie anschließend den Realteil Ihrer Lösung mit dem Flächeninhalt des von γ berandeten Gebietes.

(a) $M_1 = K_r(c)$, $c \in \mathbb{C}$, $r > 0$

(b) $M_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 2, \Im(z) > 0\}$ (Halbring).