Musterlösung Freitag - Integration und gewöhnliche Differenzialgleichung

21. März 2011

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(1) Berechne die folgenden elementaren Integrale

1 $\int x^{\frac{n}{m}}\,dx$

Lösung:

$$\int x^{\frac{n}{m}}\,dx = \frac{m}{n+m}x^{\frac{n+m}{m}}$$

2 $\int \sin(x)\,dx$

Lösung:

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

3 $\int \ln(x)\,dx$

Lösung: Wir verwenden die Substitution $y = e^x$:

$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,dx &= \int ye^y\,dy \\ &= ye^y - \int e^y\,dy \\ &= ye^y - e^y \\ &= x\ln(x) - x\end{aligned}$$

4 $\int \frac{1}{\cosh^2(ax)}\,dx$

Lösung: Aus der Ableitung des $\tanh(x)$ erhält man:

$$\int \frac{1}{\cosh^2(ax)}\,dx = \frac{\tanh(ax)}{a}$$

(2) Zeige die Existenz des folgenden uneigentlichen Integrales.

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx$$

Lösung:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{\zeta\to\infty}\int\limits_0^\zeta e^{-x}\,dx = \lim_{\zeta\to\infty}\left[(-1)e^{-x}\right]_{x=0}^{\zeta} = 1$$

Damit existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\zeta\to\infty} \int\limits_0^{\zeta} e^{-x}\, dx$ und das uneigentliche Integral konvergiert.

(3) Löse das folgende Integral mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)}$$

Lösung: Die Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{1}{x(a+bx)} = \frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\frac{1}{a+bx}$$

und damit

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(a+bx)} &= \int \frac{dx}{ax} - \int \frac{b}{a}\frac{dx}{a+bx}\\ &= \frac{1}{a}\ln(x) - \frac{1}{a}\ln(a+bx)\\ &= \frac{1}{a}\ln\left(\frac{x}{a+bx}\right)\end{aligned}$$

(4) Zeige, ob das uneigentliche Integral

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x}$$

konvergent ist und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Beweis: Die Stammfunktion $\ln(x)$ ist auf jedem Intervall $(0,\delta)$ mit $\delta > 0$ unbeschränkt und daher konvergiert das unbestimmte integral nicht.

(5) Ist $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{, für } x \in [0,1[\\ 1-x & \text{, für } x \in [1,2] \end{cases}$ Riemann-integrierbar?

Beweis: Wir teilen den Integrationsbereich in zwei Teile $[0,2] = [0,1[\cup[1,2]$. Dann ist die Funktion auf den Teilstücken integrierbar, weil sie dort monoton ist. Daher ist die Funktion auch auf $[0,2]$ integrierbar.

Aufgabe 2: Integration

(1) Löse die folgenden unbestimmten Integrale:

1 $\int \frac{dx}{x\ln(x)}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x\ln(x)} &= \int \frac{1}{y}\, dy\\ &= \ln(y)\\ &= \ln(\ln(x))\end{aligned}$$

2 $\int x\sqrt{1+x^2}\, dx$

Lösung: Wir verwenden die Substitution $\zeta = 1 + x^2$, dann gilt

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int \sqrt{\zeta}\, d\zeta\\ &= \frac{1}{3}(\zeta)^{\frac{3}{2}}\\ &= \frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

3 $\int \sinh^2(\eta)\, d\eta$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \sinh^2(\eta)\, d\eta &= \sinh(\eta)\cosh(\eta) - \int \cosh^2(\eta)\, d\eta \\ &= \sinh(\eta)\cosh(\eta) - \eta - \int \sinh^2(\eta)\, d\eta\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\int \sinh^2(\eta)\, d\eta = \frac{1}{2}\left[\sinh(\eta)\cosh(\eta) - \eta\right]$$

3 $\int \cosh^2(\eta)\, d\eta$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \cosh^2(\eta)\, d\eta &= \sinh(\eta)\cosh(\eta) - \int \sinh^2(\eta)\, d\eta \\ &= \sinh(\eta)\cosh(\eta) + \eta - \int \cosh^2(\eta)\, d\eta\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\int \cosh^2(\eta)\, d\eta = \frac{1}{2}\left[\sinh(\eta)\cosh(\eta) + \eta\right]$$

4 $\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx$ mit $a > 0$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+a^2}\, dx &= a\int \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}\, dx \\ &= a^2 \int \sqrt{1+y^2}\, dy \\ &= a^2 \int \cosh^2(\eta)\, d\eta \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\sinh(\eta)\cosh(\eta) + \eta\right] \\ &= \frac{a^2}{2}\left[y\sqrt{1+y^2} + \operatorname{arsinh}(y)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2+x^2} + \operatorname{arsinh}(\frac{x}{a})\right]\end{aligned}$$

5 $\int x^2 e^{\lambda x}\, dx$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$

Lösung: Wir machen eine Fallunterscheidung und betrachten zunächst den Fall $\lambda = 0$. Dann erhalten wir $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$. Nun nehmen wir $\lambda \neq 0$ und es folgt

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{\lambda x}\, dx &= \frac{1}{\lambda^3}\int y^2 e^y\, dy \\ &= \frac{1}{\lambda^3}\left[y^2 e^y - \int 2y e^y\, dy\right] \\ &= \frac{1}{\lambda^3}\left[y^2 e^y - 2y e^y + 2e^y\right] \\ &= \left[\frac{x^2}{\lambda} - \frac{2x}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right] e^{\lambda x}\end{aligned}$$

6 $\int \frac{e^{ax}}{b+ce^{ax}}\,dx$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^{ax}}{b+ce^{ax}}\,dx &= \frac{1}{ac}\int \frac{1}{b+y}\,dy\\ &= \frac{1}{ac}\ln(b+ce^{ax})\end{aligned}$$

7 $\int \frac{1}{1+e^{ax}}\,dx$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+e^{ax}}\,dx &= \int \frac{e^{-\frac{a}{2}x}}{e^{\frac{a}{2}x}+e^{-\frac{a}{2}x}}\,dx\\ &= -\frac{2}{a}\int \frac{y}{1+y^2}\,dy\\ &= -\frac{1}{a}\int \frac{1}{z}\,dz\\ &= -\frac{1}{a}\ln(z)\\ &= \frac{1}{a}\ln\left(\frac{e^{ax}}{1+e^{ax}}\right)\end{aligned}$$

8 $\int (ln(x))^2\,dx$

Lösung:

$$\begin{aligned}\int (\ln(x))^2\,dx &= x(\ln(x))^2 - x\ln(x) - \int (ln(x)-1)\,dx\\ &= x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x\end{aligned}$$

9 $\int \tanh^2(ax)\,dx$

Lösung:

$$\int \tanh^2(ax)\,dx = \int (1-\frac{1}{\cosh^2(ax)})\,dx = x - \frac{\tanh(ax)}{a}$$

10 $\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx$

Hinweis: Verwende die Zerlegung $\cos(x) = \frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos(x)}\,dx &= \int \frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}\,dx\\ &= \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int \frac{2}{1-t^2}\,dt\\ &= \int \frac{1}{1-t}\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt\\ &= \ln(\frac{1+t}{1-t})\\ &= \ln(\frac{1+\tan^2(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})})\end{aligned}$$

11 $\int \frac{1}{\sinh(x)}\, dx$

Lösung: Wir verwenden die Zerlegung $\sinh(x) = 2\cosh(\frac{x}{2})\sinh(\frac{x}{2})$, die Substitution $g(y) = \tanh(\frac{x}{2})$ und erhalten

$$\int \frac{1}{\sinh(x)}\, dx = \int \frac{1}{2}\sinh(\frac{2}{x})\cosh(\frac{x}{2})\, dx = \int \frac{1}{y}\, dy = \ln(\tanh(\frac{x}{2}))$$

12 $\int \frac{dx}{a-x^2} \quad (a > 0)$

Lösung: Man integriert durch Partialbruchzerlegung des Integranten

$$\int \frac{dx}{a-x^2} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\int \frac{dx}{\sqrt{a}+x} + \int \frac{dx}{\sqrt{a}-x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \ln\left(\frac{\sqrt{a}+x}{\sqrt{a}-x}\right)$$

13 $\int 3^{\sqrt{2x+1}}\, dx$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int 3^{\sqrt{2x+1}}\, dx &= \frac{1}{2}\int 3^{\sqrt{y}}\, dy \\
&= \int z3^z\, dz \\
&= \frac{z3^z}{\ln(3)} - \int \frac{3^z}{\ln(3)}\, dz \\
&= \frac{z3^z}{\ln(3)} - \frac{3^z}{\ln^2(3)} \\
&= 3^{\sqrt{2x+1}}\left(\frac{\ln(3)\sqrt{2x+1}-1}{\ln^2(3)}\right)
\end{aligned}$$

14 $\int \operatorname{artanh}(x)\, dx$

Hinweis: Benutze die folgende Darstellung des $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{artanh}(x)\, dx &= \frac{1}{2}\int \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int \ln(z)\, dz + \frac{1}{2}\int \ln(y)\, dy \\
&= \frac{1}{2}\left(z(\ln(z)-1) + y(\ln(1)-1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + x\operatorname{artanh}(x) - 1 \\
&= \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + x\operatorname{artanh}(x) + C
\end{aligned}$$

(2) Prüfen sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

1 $\int_0^\infty x^3 e^{-x}\, dx$

Lösung:

$$\begin{aligned}
\int x^3 e^{-x}\, dx &= -e^{-x}x^3 + 3\int x^2 e^{-x}\, dx \\
&= -e^{-x}\left[x^3 + 3x^2 + 6x + 6\right]
\end{aligned}$$

und damit folgt

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x}\,dx = \lim_{\zeta\to\infty} \int_0^\zeta x^3 e^{-x}\,dx = 6$$

Daher konvergiert das uneigentliche Integral.

2 $\int\limits_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx$

Hinweis: Integriere partiell.

Lösung: Der Integrant ist auf $[0,1]$ stetig, wenn man für $x=0$ den Wert 1 festlegt. Dann bleibt nur noch die obere Grenze kritisch. Dazu machen wir folgende Abschätuung

$$\int_1^R \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \cos(1) - \frac{\cos(R)}{R} - \int_1^R \frac{\cos(x)}{x^3}\,dx$$

$$\Rightarrow \left|\int_1^R \frac{\sin(x)}{x}\,dx\right| \le |\cos(1)| + |\frac{\cos(R)}{R}| + \int_1^R \left|\frac{\cos(x)}{x^3}\right|\,dx$$

und da das Integral

$$\int_1^R \left|\frac{\cos(x)}{x^3}\right|\,dx \le \int_1^R \left|\frac{1}{x^3}\right|\,dx$$

für $R\to\infty$ konvergiert, folgt, dass das uneigentliche Integral konvergiert.

3 $\int\limits_1^\infty \frac{\cos(x)}{x}\,dx$

Lösung: Betrachte

$$\begin{aligned}\int_1^\zeta \frac{\cos(x)}{x}\,dx &= \left[\frac{\sin(x)}{x}\right]_1^\zeta + \int_1^\zeta \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx \\ &\le \frac{\sin(\zeta)}{\zeta} - \sin(1) + \int_1^\zeta \frac{1}{x^2}\,dx \\ &= \frac{\sin(\zeta)}{\zeta} - \sin(1) + 1 - \frac{1}{\zeta}\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta\to\infty}\int_1^\zeta \frac{cos(x)}{x} &\le \lim_{\zeta\to\infty} \frac{\sin(\zeta)}{\zeta} - \sin(1) + 1 - \frac{1}{\zeta} \\ &= 1 - \sin(1)\end{aligned}$$

Daraus folgt nun, dass das uneigentliche Integral konvergiert.

4 $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-x^2}\,dx$

Lösung: Wir führen das Integral auf die Γ-Funktion (die explizite Verwendung ist aber nicht nötig) zurück:

$$\int_0^R x^3 e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{R^2} \zeta e^{-\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2}\left[-\zeta e^{-\zeta}\right]_0^{R^2} - \frac{1}{2}\left[e^{-\zeta}\right]_0^{R^2} = \frac{1}{2}\left[-R^2 e^{-R^2}\right] + \frac{1}{2} - \frac{e^{-R^2}}{2} \to \frac{1}{2}$$

5 $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

Hinweis: Betrachte die Ableitung des arcsin.

Lösung: Da gilt $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ folgt sofort

$$\lim_{\zeta\to\infty} \int\limits_{0}^{\zeta} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\eta\to\infty} \int\limits_{\eta}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\zeta\to\infty} [\arcsin(x)]_0^{\zeta} + \lim_{\eta\to\infty} [\arcsin(x)]_{\eta}^{0} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(3) Zeige die folgende Realtion

$$\int\limits_{0}^{\pi} \cos^{2n}(x)\,dx = \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 1}{2n\cdot(2n-2)\cdots 2}\cdot\pi \quad (n \geq 1)$$

welche Beweismethode ist hier angebracht?

Lösung: Wir verwenden das Prinzip der vollständigen Induktion.

(IA) $n = 1 \Rightarrow \int\limits_{0}^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$ unter Verwendung von $\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(x) + x)$

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^{2n+2}(x)\,dx &= \sin(x)\cos^{2n+1}(x)|_0^{\pi} + (2n+1)\int\limits_{0}^{\pi} \sin^2(x)\cos^{2n}(x)\,dx \\ &= (2n+1)\int\limits_{0}^{\pi} \cos^{2n}(x)\,dx - (2n+1)\int\limits_{0}^{\pi} \cos^{2n+2}(x)\,dx\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^{2n+2}(x)\,dx = \frac{2n+1}{2n+2}\int\limits_{0}^{2\pi} \cos^{2n}(x)$$

woraus nach einsetzen der Induktionsvoraussetzung der Induktionsschritt bewiesen ist.

4 Zeige, dass

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^{\alpha}} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1$$

gilt.

Lösung: Zunächst machen wir die Substitution $z = \log(x)$, dann schreibt sich das Integral als

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^{\alpha}} = \lim_{\zeta\to\infty} \int\limits_{\ln(2)}^{\ln(\zeta)} \frac{dz}{z^{\alpha}}$$

$\Rightarrow$ Angenommen es gelte (Beweis durch Widerspruch)

$$\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln(x))^{\alpha}} < \infty \wedge \alpha \leq 1$$

Dann müssen wir zwei Fälle unterscheiden. Betrachten wir zunächst $\alpha = 1$ und erhalten

$$\lim_{\zeta\to\infty} \int\limits_{\ln(2)}^{\ln(\zeta)} \frac{dz}{z} = \lim_{\zeta\to\infty} \left(\ln(\ln(\zeta)) - \ln(\ln(2))\right) = \infty$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme.

Nun betrachten wir den Fall $\alpha < 1$ und es gilt

$$\lim_{\zeta\to\infty} \int\limits_{\ln(2)}^{\ln(\zeta)} \frac{dz}{z} = \lim_{\zeta\to\infty} \left[\frac{z^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\ln(2)}^{\ln(\zeta)} = \infty$$

weil $1 - \alpha > 0$ ist. Dies ergibt wiederum einen Widerspruch zur Voraussetzung.

$\Leftarrow$ Es ist $\alpha > 1$ und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta\to\infty} \int\limits_{\ln(2)}^{\ln(\zeta)} z^{-\alpha}\, dz &= \lim_{\zeta\to\infty} \frac{(\ln(\zeta)^{1-\alpha})}{1-\alpha} - \frac{(\ln(2))^{1-\alpha}}{1-\alpha} \\ &= -\frac{(\ln(2))^{1-\alpha}}{1-\alpha}\end{aligned}$$

weil $1 - \alpha < 0$ ist.

(5) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{a}^{x} f(t)\, dt = f(x)$$

Beweis: Da die Funktion f auf I stetig ist, ist die Stammfunktion dort sogar differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx} \int\limits_{a}^{x} f(t)\, dt = \frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

(6) Die Gammafunktion ist definiert durch

$$\Gamma(x) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

Zeige, dass $\Gamma(x)$ für $x > 0$ konvergiert.

Beweis: Für $x > 0$ und $t \geq 0$ gilt

$$e^{-t} t^{x-1} \leq t^{x-1}$$

Es gilt nun für t_0 genügend groß

$$\begin{aligned} e^{-t_0} t_0^{x+1} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow e^{-t_0} t_0^{x-1} &\leq \frac{1}{t_0^2}\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}\int e^{-t}t^{x-1}\,dt &= \int\limits_0^{t_0} e^{-t}t^{x-1}\,dt + \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt\\ &\leq \int\limits_0^{t_0} t^{x-1}\,dt + \lim_{\zeta\to\infty}\int\limits_{t_0}^{\zeta}\frac{1}{t^2}\,dt\\ &= \left[\frac{t^x}{x}\right]_0^{t_0} - \lim_{\zeta\to\infty}\left[\frac{1}{t}\right]_{t_0}^{\zeta}\\ &= \frac{t_0^x}{x} + \frac{1}{t_0}\end{aligned}$$

Daraus folgt die Konvergenz des Integrales für jedes feste $t_0, x > 0$.

Aufgabe 3: Gewöhnliche Differentialgleichung

(1) Lösen sie folgenden homogenen Differentialgleichungen, in dem sie zunächst das charakteristische Polynom ausrechnen und dann die Anfangsbedingungen einarbeiten.

1 $a \cdot \dot{x} + b \cdot x = 0$ mit $a, b \neq 0$ und $x(t = 0) = \Lambda$

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$a\lambda + b = 0$$

und daraus ergibt sich nach einarbeitet der Anfangsbedingungen

$$x(t) = \Lambda e^{-\frac{b}{a}t}$$

2 $\ddot{x} + r\dot{x} = 0$ mit $r > 0$ und den Anfangsbedingungen $x(t = 0) = \rho, \dot{x}(t = 0) = v$.

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + r\lambda \Rightarrow \lambda = 0 \wedge \lambda = -r$$

Dann ergibt sich zunächst $x(t) = c_1 e^{-rt} + c_2$ und nach Einarbeiten der Anfangsbedingungen

$$x(t) = \frac{\rho - v}{r}e^{-rt} + \rho$$

3 $\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega x = 0$ mit $\kappa^2 > \omega > 0$ und den Anfangsbedingungen $x(t = t_0) = x_0, \dot{x}(t = t_0) = 0$

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + 2\kappa\lambda + \omega = 0 \Rightarrow \lambda = -\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega} \wedge \lambda = -\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega}$$

und nach Einarbieten der Anfangsbedingungen ergibt sich

$$x(t) = \frac{x_0}{2\sqrt{\kappa^2 - \omega}}e^{-\kappa(t-t_0)}\left[\left(\sqrt{\kappa^2 - \omega} + \kappa\right)e^{\sqrt{\kappa^2-\omega}(t-t_0)} + \left(\sqrt{\kappa - \omega} - \kappa\right)e^{-\sqrt{\kappa^2-\omega}(t-t_0)}\right]$$

(2) Löse folgendes AWP

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}(t = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lösung: Wir Lösen das homogene Problem, indem wir die Matrix A in eine Diagonalmatrix und eine nilpotente Matrix aufspalten

$$A = 2 \cdot \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten damit

$$e^{tA} = e^{2t} \cdot \left(\mathbb{1} + t \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

Somit

$$\mathbf{x}_h(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t}(1+2t) \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

Die spezielle Lösung erhalten wir nun, durch die Variation der Konstanten

$$\mathbf{x}_s(t) = e^{tA} \int_0^t e^{-sA} \mathbf{b}(s)\, ds$$

und erhalten damit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2s} & 2se^{-2s} \\ 0 & e^{-2s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} ds &= \begin{pmatrix} e^{2t} & -2te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} se^{-2s} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left[1 - (2t+1)e^{-2t} \right] \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und wir erhalten endgültig

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_s(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \left[e^{2t}(t+8t) - (2t+1) \right] \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$