Differentiation in $\mathbb{R}$, Taylorentwicklung
Musterlösung

Marcus Jung

17.03.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Differentiation in$\mathbb{R}$

1.1 Aufgabe 1

$f'(x) = [e^{ax} sin(\omega x + a)]' = ae^{ax} sin(\omega x + a) =$
$e^{ax}(asin(\omega w + a) + \omega cos(\omega x + a))$
$f'(x) = [cos(sin(cos(x^2)))]' = 2x(-sin(x^2))cos(cos(x^2))(-sin(sin(cos(x^2)))) =$
$2xsin(x^2)cos(cos(x^2))sin(sin(cos(x^2)))$
$f'(x) = exp(\frac{x^{cos(x)}}{} x^x)x^{cos(x)}(\frac{cos(x)}{x} - sin(x)ln(x) - \frac{ln(x)+1}{x^x})$

1.2 Aufgabe 2

$f(x) = |x|$
Für den Fall $x > 0$ ist $f(x) = x \to f'(x) = 1$
Für den Fall $x < 0$ ist $f(x) = -x \to f'(x) = -1$
Wenn $x = 0 = x_0$ und $h \neq 0 f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$
Dieser Grenzwert existiert nicht, weil $\frac{|h|}{h} = 1$ für $h > 0$ bzw -1 für $h < 0$

$f(x) = x\sqrt{|x|}$
Für den Fall $x > 0$ ist $f(x) = x^{\frac{3}{2}} \to f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
Für den Fall $x < 0$ ist $f(x) = x\sqrt{-x} \to f'(x) = (x(-x)^{\frac{1}{2}})' =$
$(-x)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x(-x)^{\frac{-1}{2}} = (-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-x)(-x)^{\frac{-1}{2}} =$
$(-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}(-x)^{\frac{1}{2}}$
Für den Fall $x = 0$ und $h \neq 0 f'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h\sqrt{|h|}}{h} =$
$\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{|h|} = 0$

1.3 Aufgabe 3

a)$|x-1|^3 \geq 0, |x|^3 \geq 0 \to f(x) \geq 0$
$f(x) = 0 \longleftrightarrow |x-1|^3 = 0$ und $|x|^3 = 0 \to$ Wiederspruch $\to f(x) > 0$
$\lim\limits_{|x|\to 0} (4|x-1|^3 + |x|^3) = +\infty$
b)
$x < 0 : f(x) = -4(x-1)^3 - x^3, f'(x) = -12(x-1)^2 - 3x^2$ stetig
$0 < x < 1 : f(x) = -4(x-1)^3 + x^3, f'(x) = -12(x-1)^2 + 3x^2$ stetig
$x > 1 : f(x) = 4(x-1)^3 + x^3, f'(x) = 12(x-1)^2 + 3x^2$ stetig
$\lim\limits_{x\to 0-} f'(x) = -12 = \lim\limits_{x\to 0+} f'(x)$
$\lim\limits_{x\to 1-} f'(x) = 3 = \lim\limits_{x\to 1+} f'(x) \to f'(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$
c)
$x < 0 : f''(x) = -24(x-1) - 62 = -30x + 24$ stetig

$0 < x < 1 : f''(x) = -24(x-1) + 6x = -18x + 24$ stetig
$x > 1 : f(x) = f''(x) = 24(x-1) + 6x = 30x - 24$ stetig
$\lim\limits_{x\to 0-} f''(x) = 24 = \lim\limits_{x\to 0+} f''(x)$
$\lim\limits_{x\to 1-} f''(x) = 6 = \lim\limits_{x\to 1+} f''(x) \to f''(x)$ stetig auf $\mathbb{R}$
d) Aus a),b),c) folgt $f(x)$ ist für alle x zweimal differenzierbar

1.4 Aufgabe 4

Wenn man $f^{-1}(f(x)) = x$ auf beiden Seiten nach x ableitet, erhält man:$(f^{-1})'(f(x))f'(x) = 1$ Dividiert man durch $f'(x)$, erhält man das gewünschte Ergebnis.

1.5 Aufgabe 5

$\frac{d}{dx} sin(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{sin(x+h)-sin(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{sin(x)(cos(h)-1)+cos(x)sin(h)}{h}$
Mit dem Satz von L'Hopital $(\frac{0}{0})$ folgt dann das Ergebnis. Für $cos(x)$ analog.

1.6 Aufgabe 6

$\lim\limits_{x\to 0} xcot(x) = 1$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{sin^2(x)} = \frac{-1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln^2(1+3x)-2sin^2(x)}{1-e^{-x^2}} = 7$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{xtan(x)}{1-cos(x)} = 2$

1.7 Aufgabe 7

$f'(x) = 5\frac{3-4x}{2\sqrt{x}(4x+3)^2}$
Maximum bei $(\frac{3}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{12})$; Wendepunkt: $(\frac{1}{4}, (3+2\sqrt{3})$

1.8 Aufgabe 8

$D_f = \mathbb{R}$
y-Achsensymmetrisch
x-Achse: $0, 1, -1$, y-Achse: 0
Wertebereich: $[0, \infty[$
Maximum bei:$(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}), (\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$,Minima bei:$(-1, 0), (0, 0), (1, 0)$

1.9 Aufgabe 9

Es gilt:
$cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
Durch Ableitung der Potenzreihen folgt die Behauptung.

1.10 Aufgabe 10

Es gilt: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2$. Also $E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$

1.11 Aufgabe 11

Es gilt:
$f(x) = 1 + 2x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$. Also gilt für den relativen Fehler bei eier Approximatio durch die 2. Ordnung:
$fehler_{rel} = \frac{|f(x)-T_2(x)|}{|f(x)|} = 0,065$

1.12 Aufgabe 12

a)
Die Funktion $f(x) = exp(\frac{1}{x}lnx)$ ist auf dem Intervall $J =]0, \infty[$ differenzierbar mit der (aus Ketten- und Produktregel gewonnenen) Ableitung:
$f'(x) = exp(\frac{1}{x}lnx)[\frac{-1}{x^2}lnx + \frac{1}{x^2}] = x^{\frac{1}{x}}\frac{1-lnx}{x^2}$
Sie ist offensichtlich größer als Null, falls $0 < x < e$ gilt, gleich Null bei $x = e$ und kleiner Null, falls $e < x < \infty$ gilt. Daher ist aufgrund des Monotoniekriteriums f strickt monoton wachsend im Intervall $0 < x \leq e$ und strickt monoton fallend im Intervall $e \leq x < \infty$. Insbesondere liegt bei $x = e$ ei isoliertes lokales Maximum von f.
b)
Das Argument $\frac{lnx}{x}$ der Exponentialfunktion in der Definition von f genügt am rechten Itervallende ∞ vo J der Voraussetzung der zweiten l'Hopitalschen Regel. Sie ergibt
$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{lnx}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$
$\to \lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$
Am linken Intervallende von J gilt wegen $\lim\limits_{x\to 0} lnx = -\infty$ erst recht $\lim\limits_{x\to 0} \frac{lnx}{x} = -\infty$. Das ergibt wegen $\lim\limits_{y\to -\infty} e^y = 0$ den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = 0$