Differentiation in $\mathbb{R}$, Taylorentwicklung
Übung

Marcus Jung

17.03.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Differentiation in$\mathbb{R}$

1.1 Aufgabe 1

Man berechne die Ableitung nach x von
$f(x) = e^{ax} sin(wx + a)$
$f(x) = cos(sin(cos(x^2)))$
$f(x) = exp(\frac{x^{cos(x)}}{x^x}$

1.2 Aufgabe 2

Man berechne die Ableitung nach x dort, wo die Funktion differezierbar ist:
$f(x) = |x|$
$f(x) = x\sqrt(|x|)$

1.3 Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 4|x - 1|^3 + |x|^3, -\infty < x < \infty$.
a) Man zeige: $f(x) > 0$ für alle x. Welchen Wert strebt $f(x)$ zu, falls $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$?
b) Man berechne $f'(x)$
c) Man zeige:
$f''(x) = -30x + 24, x \leq 0$
$f''(x) = -18x + 24, 0 < x \leq 1$
$f''(x) = 30x - 24, x > 1$
d) Man zeige, dass $f(x)$ für alle x zweimal stetig differenzierbar ist.

1.4 Aufgabe 4

Man beweise die Behauptung über die Ableitung der Umkehrfunktion aus der Vorlesung.
Hilfe: Man betrachte $f^{-1}(f(x)) = x$

1.5 Aufgabe 5*

Werwenden Sie die Definition der Ableitung aus der Vorlesung um die Ableitung von $sin(x)$ und $cos(x)$ zu finden. Anleitung: Setzen Sie die Definition der Ableitung an und formen Sie den Ausdruck mit entsprechenden Additionstheoremen so um, dass Sie auf einen Ausdruck kommen, dessen Grenzwert Sie mit Hilfe des Satzes von L'Hopital bestimmen können.

1.6 Aufgabe 6

Man bestimme folgende Grenzwerte mithilfe der Regeln von L'Hopital:
$\lim\limits_{x\to 0} xcot(x)$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{cos(x)-1}{sin^2(x)}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln^2(1+3x)-2sin^2(x)}{1-e^{-x^2}}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{xtan(x)}{1-cos(x)}$

1.7 Aufgabe 7

Man bestimme Extrema und Wendepunkte folgender Funktion:
$f(x) = \frac{5\sqrt{x}}{4x+3}$

1.8 Aufgabe 8

Gegeben sei folgende Funktion:
$f(x) = |x^2 - 1| + |x| - 1$
Man bestimme: Definitionsbereich, Wertebereich, Achsenschnittpunkte, Symmetrie, Extrema.

1.9 Aufgabe 9*

Finden Sie die Taylorkoeffizienten von $sin(x)$ und $cos(x)$ und zeigen Sie, dass gilt: $(sin(x))' = cos(x)$ und $(cos(x))' = -sin(x)$

1.10 Aufgabe 10

Laut der spreziellen Relativitätstheorie gilt $E = \gamma mc^2$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$. Zeigen Sie, indem Sie den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ bis zur 2. Ordnung um 0 entwickeln, dass die Formel bei kleinen Geschwindigkeiten in den Ausdruck für die klassische kinetische Energie plus Ruhenergie übergeht.

1.11 Aufgabe 11

Man entwickle die Funktion $f(x) = \frac{(1+x)^2}{\sqrt{1-x^3}}$ bis einschließlich 3. Ordnung um $x_0 = 0$ und gebe eine Schranke für den relativen Fehler, falls $|x| < \frac{1}{2}$ ist und die Funktion durch das Taylorpolynom 2. Ordnung approximiert wird, an.

1.12 Aufgabe 12

Untersuchen Sie die auf $]0, \infty[$ durch $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = exp(\frac{1}{x} lnx)$ definierte Funktion.
a) Bestimmen Sie über die Ableitung von f die Monotonie-Intervalle und die lokalen Extrema von f
b) Untersuchen Sie die Existenz und gegebenenfalls die Werte der Limes von $f(x) \lim\limits_{x \to 0}$ und $\lim\limits_{x \to \infty}$