Reihen
Musterlösung

Marcus Jung

15.03.2011

Inhaltsverzeichnis

1 Reihen

1.1 Aufgabe 1:

a) Falsch. Beispielsweise ist die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ...$ konvergent (geht gegen ln2). Sie ist aber nicht absolut konvergent, denn beim Nachprüfen der definierten Eigenschaft, erhält man $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^{n-1}}{n}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ die harmonische Reihe.
b)Falsch. Die Aussage wird jedoch für absolut konvergente Reihen richtig.
c)Richtig. (a_n) ist dann sogar eine Nullfolge.
d)Falsch.
e) Falsch. (a_n) Nullfolge ist nur eine notwendige Bedingung für die Konvergenz der Reihe.

1.2 Aufgabe 2:

a)Z.B. die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$. Es gilt $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Andererseits divergiert die Folge. Dies sieht man wie folgt: Angenommen, die Folge (a_n) konvergiere gegen ein $a \in \mathbb{R}$. Dann gibt es nach Definition zu $\epsilon := 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq N$ folgt dann nach der Deiecksungleichung: $2 = |a_{n+1} - a| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| < 1 + 1 = 2$. Widerspruch.
b) Z.B. die alternierende harmonische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

c) Z.B. die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

1.3 Aufgabe 3:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} = 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} -(\frac{1}{2})^n = 2\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{4}{3}$
b) Da $-1 < sinx < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$|\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{sin(\sqrt{n})}{n^{\frac{5}{2}}}| \leq \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$
Da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ nach dem Majorantenkriterium konvergiert, konvergiert auch die gegebene Reihe absolut.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-3} \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2} \geq \frac{1}{4} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$
Wir haben also eine divergierende Minorante. Somit divergiert auch die gegebene Folge.
d)Nach dem Archimedischen Axiom gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sodass $n_0 \geq |x|$. Für alle $n \geq n_0$ gilt somit:
$|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} x^{2n+2}}{\frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}}| = |\frac{-1}{(2n+1)(2n+2)x^2}| = \frac{|x^2|}{(2n+1)(2n+2)} \leq \frac{|x^2|}{4n^2} \leq \frac{|x^2|}{4n_0{}^2} \leq \frac{1}{4} := \theta < 1$

Somit konvergiert die Folge nach dem Quotientenkriterium absolut, und zwar für alle $x \in \mathbb{R}$

e)Die Reihe ist konvergent, da z.B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ Majorante ist.

f) Die Reihe divergiert, da eine divergente Minorante (die harmonische Reihe) existiert:
$\frac{1}{\sqrt{n-1}} > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$

1.4 Aufgabe 4:

Wegen $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ ist
$\frac{2k+1}{(k+1)^2k^2} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)^2k^2} - \frac{k^2}{(k+1)^2k^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$
Also ist für $n \in \mathbb{N}$
$\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}) =$
$(1 - \frac{1}{2^2}) + (\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}) + (\frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2}) + ... + (\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}) = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$
Damit folgt: $\lim_{k\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1$

1.5 Aufgabe 5:

a)Für alle $n \geq 1$ hat man die Zerlegung:
$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$
Also ist $\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}(\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1} - \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}(\sum\limits_{n=0}^{k-1} \frac{1}{2n+1} - \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{2n+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2k+1})$
Daher gilt:
$\lim_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$
b) Man verwende hier die Exponentialreihe:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 2(e^2 - 1)$
c)Es gilt: $\frac{1}{(3n+1)(3n-2)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1})$ Die Lösung erfolgt analog zu Aufgabe a). Der Wert beträgt $\frac{1}{3}$
d) Die Reihe kann auf die geometrische Reihe zurückgeführt werden:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^{n/2}2^{1-n} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{\sqrt{3}}{2})^n = 2(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\frac{\sqrt{3}}{2})^n - 1) = 2(\frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} - 1) = \frac{\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

1.6 Aufgabe 6:

a) Nach der Formel von Cauchy Hadamard:
$r = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}} = \frac{1}{0} = \infty$ Die Reihe konvergiert für alle x.
b) Der Konvergenzradius ist
$r = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|(-1)^{n+1}|}{n}}} = \frac{1}{lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1$

c) Nach dem Wurzelkriterium muss gelten:
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^{5n+1}|}{1+2^n}} < 1$
$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^{5n+1}|}{1+2^n}} = \frac{|x^{5+\frac{1}{n}}|}{\sqrt[n]{1+2^n}} = \frac{|x|^5}{2}$
Somit ist der Konvergenzradius $r = \sqrt[5]{2}$
d) Der Konvergenzradius ist gegeben durch:
$r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n}}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{2}$
e) Hier ist der Konvergenzradius gegeben durch
$r = \frac{1}{\lim sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}}}$
Es ist zu beachten, dass hier unbedingt der Limes superior, wie auch in der Vorlesung beschrieben, zu verwenden ist. Dies liegt daran, dass kein Grenzwert existiert. Es existieren allerdings Häufungspunkte, von denen der größere verwendet wird. Weiterhin gilt:
$\frac{1}{\lim sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2+(-1)^n)^n}{n}}} = \frac{1}{\lim sup_{n\to\infty} \frac{(2+(-1)^n)}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{3}$
Der Konvergenzradius beträgt somit $\frac{1}{3}$

1.7 Aufgabe 7:

Die Reihe ist absolut konvergent, also gilt:
$exp(z)exp(w) = (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!})(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{w^l}{l!})$
$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k w^{n-k}}{k!(n-k)!} =$
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}) =$
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = exp(z+w)$