Angabe Analysis 1 - Beweise, Vollständige Induktion, Folgen

14. März 2011

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(i) Zeige durch geschicktes Umformen, dass

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right)\\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n+1-k)}\\ &= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}\\ &= \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

(ii) Zeige durch vollständige Induktion, dass $\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \in \mathbb{N}_0$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

(IA) $n = 0 : 0 \in \mathbb{N}_0$

(IS) $n \mapsto n+1 : \frac{1}{6}(n+1) + \frac{1}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{3}(n+1)^3 = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 + \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] + 2n^2 + n \in \mathbb{N}_0$

(iii) Beweise den binomischen Satz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis: Vollständige Induktion:

(IA) $n = 0 : (x+y)^0 = 1 = \sum\limits_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{-k}$

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k y^{n+1-k} &= \sum_{k=0}^{n+1}\left[\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right]x^k y^{n+1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k-1}x^k y^{n+1-k}\\ &= y(x+y)^n + x(x+y)^n\\ &= (x+y)^{n+1}\end{aligned}$$

(iv) Sei (a_n) eine konvergente Folge, dann gilt (b_n) mit $b_n := a_n - a_{n+1}$ ist eine Nullfolge.

Beweis: Da (a_n) konvergent ist, gilt $|a_n - a| < \frac{\epsilon}{2}$ für ein $N \in \mathbb{N}$ und $n > N$. Daher gilt

$$|a_n - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| \leq \epsilon$$

mit $n > N$.

Aufgabe 2: Vollständige Induktion

(i) Beweise $2^n > 2n$ für $n > 2$ durch vollständige Induktion.

Beweis:

(IA) $n = 3 : 2^3 = 8 > 6 = 2 \cdot 3$

(IS) $n \mapsto n+1 : 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2 \cdot (2n) = 2(n+n) > 2(n+1)$

(ii) Es seien F_n ($n \in \mathbb{N}$) die Fibonacci-Zahlen, d.h. $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Zeige die folgenden Relationen:

(a) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2k+2}$

Beweis:

(IA) $n = 0 : \Rightarrow \sum_{k=0}^{0} F_{2k+1} = F_1 = 1 = F_2$

(IS) $n-1 \mapsto n : \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} F_{2k+1} = F_{2n+1} + F_{2n} = F_{2n+2}$

(b) $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$

Beweis:

(IA) $n = 0 : F_1^2 = 1 = 0 + 1 = F_0 F_2 + (-1)^0$

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}F_{n+1}F_{n+3} + (-1)^{n+1} &= F_{n+1}(F_{n+2} + F_{n+1}) + (-1)^{n+1}\\ &= F_{n+1}^2 + F_{n+2}F_{n+1} + (-1)^{n+1}\\ &= F_{n+2}F_n + F_{n+2}F_{n+1} + (-1)^n - (-1)^n\\ &= F_{n+2}^2\end{aligned}$$

(iii) Zeige $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ für $n \geq 0$.

Beweis:

(IA) $n = 0 : \sum_{k=1}^{0}(2k-1)^2 = 0 = \frac{1}{3}0 \cdot (4 \cdot 0^2 - 1)$

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1)^2 &= (2(n+1)-1)^2 + \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 \\ &= (2(n+1)-1)^2 + \frac{1}{3}n(4n^2-1) \\ &= \frac{4}{3}n^3 + 4n^2 + \frac{11}{3}n + 1 \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(4n^2+8n+3) \\ &= \frac{1}{3}(n+1)(4(n+1)^2-1)\end{aligned}$$

(iv) Zeige $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Beweis:

(IA) $n = 1 : \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{n}{n+1} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

(v) Man $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für $n \geq 0$ durch vollständige Induktion.

Beweis:

(IA) $n = 0 : \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} = 1 = 2^0$

(IS) $n \mapsto n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=0}^{n+1} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$

(vi) Beweise die Bernoulli Ungleichung $(1+x)^n > 1 + nx$ für $n \geq 2$ und $x > -1, x \neq 0$.

Beweis:

(IA) $n = 2 : (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 > 1 + 2x$ *Beachte das $x \neq 0$ gilt.*

(IS) $n \mapsto n+1 : (1+x)^{n+1} = (1+x) \cdot (1+x)^n > (1+x)(1+nx) = 1 + x + nx + nx^2 > 1 + (n+1)x$

(vii) Zeige folgende Relationen

(1) $n! \geq 2^{n-1}$ für $n > 1, n \in \mathbb{N}$

Beweis:

(IA) $n = 2 : 2! = 2 \geq 2^1$

(IS) $n \mapsto n+1 : (n+1)! = (n+1) \cdot n! \geq (n+1) \cdot 2^{n-1} \geq 2 \cdot 2^{n-1} \geq 2^n$

(2) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ für $n > 1, n \in \mathbb{N}$

Beweis:

(IA) $n = 0 : \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{k!} = 2 \leq 2 = 3 - 1$

(IS) $n \mapsto n+1 : \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} + 3 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^n} + 3 - \frac{1}{2^{n-1}} = 3 - \frac{1}{2^n}$

Aufgabe 3: Folgen

(i) Man zeige, ob diese Folgen konvergieren oder nicht, und bestimme im Falle der Existenz den Grenzwert.

(1) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Beweis: a_n ist eine Nullfolge:

$$|a_n| = \frac{1}{n} < \epsilon$$

mit $N(\epsilon) := \frac{1}{\epsilon}$.

(2) $a_n = i^n + (-1)^n$

Beweis: Ist nicht konvergent, da $a_{4n} = 2$ und $a_{4n+2} = 0$ zwei verschiedene Häufungswerte sind (Grenzwert ist eindeutig).

(3) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

Beweis: Wegen $n! \geq 3^{n-2}$ für $n \neq 3$ folgt

$$a_n \geq \frac{1}{3^2}\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

und daher ist a_n unbeschränkt und damit nicht konvergent.

(4) $a_n = \frac{5n}{\sqrt{n^2+2}}$

Beweis: Behauptung $a_n \to 5$

$$|a_n - 5| = 5|\frac{n - \sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+2}}| = 5|\frac{n^2 - (n^2+2)}{\sqrt{n^2+2} \cdot (n + \sqrt{n^2+2})}| = 5\frac{2}{\sqrt{n^2+2}n + n^2 + 2} < \epsilon$$

mit $5\frac{2}{N(\epsilon)\sqrt{N^2(\epsilon)+2} + N^2(\epsilon)+2} := \epsilon$

(5) $a_n = \frac{\sin(n^2 \frac{\pi}{2})}{n}$

Beweis:

$$|a_n| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

mit $N(\epsilon) := \epsilon$.

(6) $a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$

Beweis: Konvergierrt nicht, da

$$|a_n - a_{n+1}| = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

keine Nullfolge ist.

(7) $a_n = \sqrt[n]{a}$ mit $a > 0$

Hinweis: Verwende die Bernoullische Ungleichung.

Beweis: Wir machen eine Fallunterscheidung: Für $a = 1$ ist die Folge klarerweise konvergent mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Für $a > 1$ sei nun $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$, dann folgt aus $(1 + x_n)^n > 1 + nx_n > nx_n$

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \frac{a}{n} < \epsilon$$

mit $N(\epsilon) := \frac{a}{\epsilon}$. Für den verbleibende Fall $0 < a < 1$ gilt nun $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ und wegen $\frac{1}{a} > 1$ folgt die Konvergenz aus dem Rechenregeln und dem Beweis der Konvergenz für den Fall $a > 1$. Der Grenzwert lautet nach den Rechenregeln ebefalls $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

(8) $a_n = \frac{a^n - n^s}{a^n + n^s} \quad (a \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Q})$

Beweis: Fallunterscheidung:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^s a^{-n}}{1+n^s a^{-n}} = 1 & \text{, für } a > 1 \text{ oder } a = 1, s < 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n n^{-s} - 1}{a^n n^{-s} - 1} = -1 & \text{, für } a < 1 \text{ oder } a = 1, s > 0 \\ 0 & \text{, für } a = 1 \text{ und } s = 0 \end{cases}$$

Für die restlichen Fälle ist a_n nicht konvergent.

(ii) Bestimmen sie die Grenzwerte:

(1) $a_n = \sqrt[n]{n^k}$ mit $k \in \mathbb{N}$

Beweis: Wende die Multiplikationsregel k-mal auf $\sqrt[n]{n}$ an:

$$\sqrt[n]{n^k} = \sqrt[n]{n} \cdots \sqrt[n]{n} \to 1$$

(2) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Beweis:

$$a_n = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \to 0$$

(3) $a_n = \sqrt{n^2-2n} - \sqrt{n^2-3n}$

Beweis:

$$a_n = \frac{n^2-2n-n^2+3n}{\sqrt{n^2-2n}+\sqrt{n^2-3n}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}}} \to \frac{1}{2}$$

(4) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

Beweis:

$$a_n = \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2} \to 0$$

(5) $a_n = \frac{(a+n)^2}{a^2-n^2}$

Beweis:

$$a_n = \frac{(a+n)^2}{(a+n)(a-n)} = \frac{\frac{a}{n}+1}{\frac{a}{n}-1} \to -1$$

(6) $a_n = \frac{n+2\sqrt{n}}{3n-\sqrt{n}}$

Beweis:

$$a_n = \frac{1+2\frac{1}{\sqrt{n}}}{3-\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{3}$$

(7) $a_n = \frac{n+\sin(n^2)}{n+\cos(n)}$

Beiweis:

$$a_n = \frac{1+\frac{\sin(n^2)}{n}}{1+\frac{\cos(n)}{n}} \to 1$$

(8) $a_n = n\left(1-\sqrt{1-\frac{c}{n}}\right)$

Beweis:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = n\frac{1-\left(1-\frac{c}{n}\right)}{1+\sqrt{1-\frac{c}{n}}} = \frac{c}{1+\sqrt{1-\frac{c}{n}}} = \frac{c}{2}$$

(iii) Gebe den lim sup und lim inf zu den gegebenen Folgen an. Gib ebenfalls zu jedem Häufungswert eine konvergente Teilfolge an.

(1) $a_n = (-1)^n$

Beweis:

$$\limsup_n a_n = 1 \quad , \quad \liminf_n a_n = -1$$

Konvergente Teilfolgen sind

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n} = 1 \tag{1}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (-1)^{2n+1} = -1 \tag{2}$$

(2) $c_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & , \text{ für } n \in 2\mathbb{N} \\ 1 - \frac{1}{n^2} & , \text{ für } n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$

Beweis: Da $c_{2n} = \frac{1}{(n)^2}$ eine Nullfolge ist und es gilt $c_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, folgt $\liminf_n c_n = 0$. Außerdem folgt aus $c_n \leq 1$ und

$$c_{2n+1} = \frac{4n^2 + 4n}{(2n+1)^2} = \frac{4 + \frac{4}{n}}{(2 + \frac{1}{n})^2} \to 1$$

dass $\limsup_n c_n = 1$. Konvergente Teilfolgen sind

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} c_{2n+1} = 1$$

.

(iv) Beweise die Konvergenz der folgenden, rekursiv definierten Folgen und bestimme den Grenzwert:

(1) $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ mit $a_1 = \frac{1}{4}$ und $n \geq 1$

Beweis: Zunächst einmal beweisen wir die Konvergenz, dazu beweisen wir, dass $a_{n+1} \geq a_n \Leftrightarrow a_n^2 - a_n + \frac{1}{4} \geq 0$ und $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Beweise werden durch Induktion geführt. Für die erste Behauptung gilt

(IA) $n = 1 : a_1^2 - a_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4^2} \geq 0$

(IS) $n \mapsto n+1 : a_{n+2} = a_{n+1}^2 + \frac{1}{4} \geq a_n^2 + \frac{1}{4} = a_{n+1}$

und die Folge ist daher monoton wachsend. Desweiteren erhält man aus

(IA) $n = 1 : a_1 \leq \frac{1}{2}$

(IS) $n \mapsto n+1 : a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

und die Folge ist insgesamt von oben beschränkt und monoton wachsend, daher auch konvergent. Der Grenzwert existiert also.

Dann berechnen wir den Grenzwert a von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Oben wurde gezeigt, dass dieser existiert und wir schreiben daher

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} (a_n^2 + \frac{1}{4}) \Rightarrow a = a^2 + \frac{1}{4}$$

woraus $a = \frac{1}{2}$ folgt.

(2) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ für alle $n \geq 0$ und $x_0, a > 0$.

Beweis: Beim Beweis gehen wir wie in (1) vor. Zunächst beweisen wir die zwei Relationen $x_n \geq \sqrt{a}$ und $x_n \geq x_{n+1}$ für alle $n \geq 1$. Die erste folgt aus

(IA) $n = 0 : x_0 > 0$ nach Voraussetzung

(IS) $n \mapsto n+1 : x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) > 0$

und mit

$$x_n^2 = \frac{1}{4}\left(x_n^2 + 2a + \left(\frac{a}{x_n}\right)^2\right) = \frac{1}{4}\left(x_n - \frac{a}{x_n}\right)^2 + a \geq a$$

folgert man, dass $x_n \geq \sqrt{a}$ und die Folge ist daher nach unten beschränkt. Weiterhin

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leq \frac{1}{2}\left(x_n + \sqrt{a}\right) \leq \frac{1}{2}\left(x_n + x_n\right) \leq x_n$$

und die Folge ist zusätzlich monoton fallend. Daher folgt, dass x_n konvergent ist und man kann folgern

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

und man erhält $x := \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.

(v) Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$ und

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \to a$ gilt.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$, dann folgt aus der Konvergenz von (a_n), dass es einen Index $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_i - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad , \text{ für } i > N$$

Für $n > \max N, \frac{2}{\epsilon}\sum_i = 1^N |a_i - a|$, gilt

$$|b_n - a| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N}|a_i - a| + \frac{1}{n}\sum_{i=N+1}^{n}|a_i - a| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon(n-N)}{2n} \leq \epsilon$$

(vi) Finde alle Häufungswerte und gebe zu jedem Häufungswert eine konvergente Teilfolge an.

(1) $a_n = i^n + \frac{1}{2^n}$

Beweis: Die Häufungspunkte sind $1, i, -1, i$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} a_{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^{4n}}\right) = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{4n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(i + \frac{1}{2^{4n+1}}\right) = i$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{4n+2} = \lim_{n\to\infty}\left(-1 + \frac{1}{2^{4n+2}}\right) = -1$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{4n+3} = \lim_{n\to\infty}\left(-i + \frac{1}{2^{4n+3}}\right) = -i$$

(2) $a_n = (-1)^n \frac{1-n}{2n+1}$

Beweis: Die Häufungspunkte sind $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n} - 1}{2 + \frac{1}{2n}} = -\frac{1}{2}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+1} - 1}{2 + \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{2}$$