Angabe Analysis 1 - Beweise, Vollständige Induktion, Folgen

14. März 2011

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(i) Zeige durch geschicktes Umformen, dass

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

gilt.

(ii) Zeige durch vollständige Induktion, dass $\frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 \in \mathbb{N}_0$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(iii) Beweise die Bernoullische Ungleichung durch vollständige Induktion.

(iv) Beweise den binomischen Satz

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

(v) Sei (a_n) eine konvergente Folge, dann gilt (b_n) mit $b_n := a_n - a_{n+1}$ ist eine Nullfolge.

Aufgabe 2: Vollständige Induktion

(i) Beweise $2^n > 2n$ für $n > 2$ durch vollständige Induktion.

(ii) Es seien F_n $(n \in \mathbb{N})$ die Fibonacci-Zahlen, d.h. $F_0 = 0, F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Zeige die folgenden Relationen:

(a) $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2k+2}$

(b) $F_{n+1}^2 = F_n F_{n+2} + (-1)^n$

(iii) Zeige $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2-1)$ für $n \geq 0$.

(iv) Zeige $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(v) Man $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ für $n \geq 0$ durch vollständige Induktion.

(vi) Beweise die Bernoulli Ungleichung $(1+x)^n > 1 + nx$ für $n \geq 2$ und $x > -1, x \neq 0$.

(vii) Zeige folgende Relationen

(1) $n! \geq 2^{n-1}$ für $n > 1, n \in \mathbb{N}$

(2) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq 3 - \frac{1}{2^{n-1}}$ für $n > 1, n \in \mathbb{N}$

Aufgabe 3: Folgen

(i) Man zeige, ob diese Folgen konvergieren oder nicht, und bestimme im Falle der Existenz den Grenzwert.

(1) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

(2) $a_n = i^n + (-1)^n$

(3) $a_n = \frac{n!}{2^n}$

(4) $a_n = \frac{5n}{\sqrt{n^2+2}}$

(5) $a_n = \frac{\sin(n^2 \frac{\pi}{2})}{n}$

(6) $a_n = \left(\frac{3+4i}{5}\right)^n$

(7) $a_n = \sqrt[n]{a}$ mit $a > 0$

Hinweis: Verwende die Bernoullische Ungleichung.

(8) $a_n = \frac{a^n - n^s}{a^n + n^s} \quad (a \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{Q})$

(ii) Bestimmen sie die Grenzwerte:

(1) $a_n = \sqrt[n]{n^k}$ mit $k \in \mathbb{N}$

(2) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(3) $a_n = \sqrt{n^2 - 2n} - \sqrt{n^2 - 3n}$

(4) $a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

(5) $a_n = \frac{(a+n)^2}{a^2 - n^2}$

(6) $a_n = \frac{n + 2\sqrt{n}}{3n - \sqrt{n}}$

(7) $a_n = \frac{n + \sin(n^2)}{n + \cos(n)}$

(8) $a_n = n\left(1 - \sqrt{1 - \frac{c}{n}}\right)$

(iii) Gebe den lim sup und lim inf zu den gegebenen Folgen an. Gib ebenfalls zu jedem Häufungswert eine konvergente Teilfolge an.

(1) $a_n = (-1)^n$

(2) $c_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{, für } n \in 2\mathbb{N} \\ 1 - \frac{1}{n^2} & \text{, für } n \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$

(iv) Beweise die Konvergenz der folgenden, rekursiv definierten Folgen und bestimme den Grenzwert:

(1) $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$ mit $a_1 = \frac{1}{4}$ und $n \geq 1$

(2) $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ für alle $n \geq 0$ und $x_0, a > 0$.

(V) Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =: a$ und

$$b_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Zeige, dass $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \to a$ gilt.

(vi) Finde alle Häufungswerte und gebe zu jedem Häufungswert eine konvergente Teilfolge an.

(1) $a_n = i^n + \frac{1}{2^n}$

(ii) $a_n = (-1)^n \frac{1-n}{2n+1}$