Bilinearformen, euklidische und unitäre Vektorräume, normale Endomorphismen

Übungen

25. März 2011

Aufgabe 1: Geben Sie die symmetrische Matrix an, die zu jedem der folgenden quadratischen Polynome gehört:

1. $q(x, y) = 4x^2 - 6xy - 7y^2$
2. $q(x, y) = xy + y^2$
3. $q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2$
4. $q(x, y, z) = x^2 - 2yz + xz$

Lösung:

$$1. \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, \quad 2. \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad 3. \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2: Seien $u = (x_1, x_2)$ und $v = (y_1, y_2)$. Bestimmen Sie, welche der folgenden Ausdrücke bilineare Formen auf $\mathbb{R}^2$ sind.

1. $f(u, v) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$
2. $f(u, v) = x_1 + y_2$
3. $f(u, v) = 3x_2y_2$
4. $f(u, v) = x_1x_2 + y_1y_2$
5. $f(u, v) = 1$
6. $f(u, v) = 0$

Lösung:

1. Ist Bilinearform, da f in der Form $f(u,v) = ^t uAv$ dargestellt werden kann, mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

2. Ist keine Bilinearform, da $f(-1^t(x_1, x_2), ^t(y_1, y_2)) = -x_1 + y_2 \neq -x_1 - y_2 = -1f(^t(x_1, x_2), ^t(y_1, y_2))$.

3. Ist Bilinearform, da f in der Form $f(u,v) = ^t uAv$ dargestellt werden kann, mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. Ist keine Bilinearform, da $f(-1^t(x_1, x_2), ^t(y_1, y_2)) = -x_1(-x_2) + y_1y_2 \neq -x_1x_2 - y_1y_2 = -1f(^t(x_1, x_2), ^t(y_1, y_2))$.

5. Ist keine Bilinearform, da $f(-1u, v) = 1 \neq -1 = -1f(u,v)$.

6. Ist Bilinearform, da da f in der Form $f(u,v) = ^t uAv$ dargestellt werden kann, mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3:

1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Matrizen hermitesch sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie, welche der folgenden Matrizen normal ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$$

Lösung: 1. A ist hermitesch, da sie gleich ihrer konjugiert Transponierten ist. B ist nicht hermitesch, obgleich sie symmetrisch ist. C ist hermitesch, da sie reell und symmetrisch ist.

2.

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$$

Also ist A nicht normal.

$$BB^* = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

$$B^*B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ 2-2i & 6 \end{pmatrix}$$

Also ist B normal.

Aufgabe 4: Sei $V = \mathbb{R}[x]_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Zeigen Sie, dass $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ein Skalarprodukt auf V definiert.

Lösung:

Linearität:

$$\langle \alpha f + h|g\rangle = \int_0^1 (\alpha f(t)+h(t))g(t)dt = \alpha \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 h(t)g(t)dt = \alpha \langle f|g\rangle + \langle h|g\rangle$$

Symmetrie: gilt, weil die Multiplikation von Funktionen kommutativ ist.

Positive Definitheit: Für $f \neq 0$ ist $\langle f|f\rangle > 0$, und für $f = 0$ ist $\langle f|f\rangle = 0$.

Aufgabe 5:

1. Zeigen Sie, dass jedes skalare Vielfache von u ebenfalls zu v orthogonal ist, wenn u zu v orthogonal ist. Geben Sie einen Einheitsvektor v_3 an, der senkrecht zu $v_1 = (1, 1, 2)$ und $v_2 = (0, 1, 3)$ steht.
2. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf die 3 Vektoren an.
3. Sei W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$, der durch $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ und $v = (2, 4, 7, 2, -1)$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an.

Lösung:

1. Wenn $\langle f|f\rangle = 0$, so gilt auch $\langle k \cdot f|f\rangle = 0$.

   Über das Kreuzprodukt bestimmt man $v_3 = (1, -3, 1)$. Dieser Vektor muss noch normiert werden, also erhält man $v_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1, -3, 1)$.

2. Wähle $w_1 = (1, 1, 2)$

$$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - (1\ 1\ 2) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (\frac{-7}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{4}{6})$$

   Da v_1 und v_3 bereits senkrecht aufeinander stehen, sind wir fertig.

Aufgabe 6: Sei T auf $\mathbb{C}^3$ definiert durch $T(x, y, z) = (2x + (1 - i)y, (3 + 2i)x - 4iz, 2ix + (4 - 3i)y - 3z)$. Geben Sie $T^*(x, y, z)$ an.

<u>Lösung:</u> Zuerst gebe man die Matrix A an, die T darstellt.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 3+2i & 0 & -4i \\ 2i & 4-3i & -3 \end{pmatrix}$$

Bilde die konjugiert transponierte A^* von A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3-2i & -2i \\ 1+i & 0 & 4+3i \\ 0 & 4i & -3 \end{pmatrix}$$

Somit erhält man: $T^*(x, y, z) = (2x + (3 - 2i)y - 2iz, (1 + i)x + (4 + 3i)z, 4iy - 3z)$.

Aufgabe 7: Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (kurze Begründung).

a) Für jede unitäre Matrix A gilt det(A)=1

b)Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 23 & 11 & -450 \\ 11 & -7 & 3 \\ -450 & 3 & 78 \end{pmatrix}$$

ist diagonalisierbar.

<u>Lösung:</u>

a) Falsch, denn $A = (-1) \in \mathbb{C}^{1\times 1}$ ist unitär, aber $det(A) = -1 \neq 1$.

b) Wahr, denn B ist reell und symmetrisch, also diagonalisierbar.

Aufgabe 8: Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $F(A, B) = Spur(AB)$.

1. Zeigen Sie, dass F eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Für die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2 \times 2$ berechne man die Grammatrix $G_E(F)$.

Lösung:

1. Symmetrie ist erfüllt, da $Spur(AB) = Spur(BA)$.

Linearität: die Spurabbildung ist eine Linearform in der ersten Komponente. Da sie ausserdem symmetrisch ist, folgt, dass F eine Bilinearform ist.

2. Die Standardbasis für $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist

$$E = (\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Daraus ergibt sich laut Definition aus der Vorlesung die Gramsche Matrix:

$$G_E(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

A: $det(3) = 3 > 0, det(\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}) = 6 > 0, det(A) = 6 - 3 - 2 = 1 > 0.$

Also ist A positiv definit.

B: Man kann schreiben (für $x = (x_1, x_2, x_3)$) $\varphi(x, x) =^t xBx = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$. Für $x = (0, 1, 1)$ erhält man $\varphi(x, x) = 2 > 0$, für $x = (0, -1, 1)$ erhält man hingegen $\varphi(x, x) = -2 < 0$. Somit ist B indefinit.

C: $det(3) = 3 > 0,\ det(C) = -10 < 0$, also ist auch C indefinit.

D: $det(10) = 10 > 0,\ det(D) = 1 > 0$, also ist D positiv definit.

Aufgabe 10: Es seien die Standardbasis $S := \{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie die Basen

$$B = \{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{und } C = \{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Ferner seien $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch:

$$\varphi((x_1,x_2)) := \begin{pmatrix}x_1 - x_2\\0\\2x_1 - x_2\end{pmatrix} \text{und} \psi((x_1,x_2,x_3)) = \begin{pmatrix}x_1 + 2x_3\\x_2 - x_3\\x_1 + x_2\\2x_1 + 3x_3\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen ${}_B[\varphi]_S$, ${}_C[\psi]_B$ und ${}_C[\psi \circ \varphi]_S$.

Lösung:

${}_B[\varphi]_S$:

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$${}_B[\varphi]_S = \begin{pmatrix}2 & -1\\-2 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

${}_C[\psi]_B$:

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3\\0\\2\\5\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} 0 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} 0 \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\varphi(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$_C[\varphi]_S = \begin{pmatrix}5 & 2 & 2\\ -3 & 0 & -1\\ -2 & -1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$_C[\psi \circ \varphi]_S =_C [\psi]_B \cdot_B [\varphi]_S = \begin{pmatrix}8 & -5\\ -7 & 4\\ -3 & 2\\ 7 & -4\end{pmatrix}$$

Aufgabe 11: Sei $V = \mathbb{R}[z]_2$ und $f : V \leftarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung $p(z) \mapsto^t (p(1), p'(1))$, wobei p(1) bzw. p'(1) die Auswertung bzw. die Ableitung von p an der Stelle $z = 1$ bezeichnet.

Berechnen Sie $_R[f]_B$ mit $B = (1, z-1, (z-1)^2)$ und $R = ({}^t(1,0), {}^t(0,1))$ den Basen von V bzw. $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

$$f(1) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad f(z-1) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad f((z-1)^2) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

Also ist

$$_R[f]_B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Aufgabe 12: Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^{n\times n}$, und es sei

$$S := \{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\}$$

die Basis von V.

Es sei ferner $\varphi : V \mapsto V, \varphi(X) := X +^t X$.

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_S[\varphi]_S$.

Lösung:

$$_S[\varphi]_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$