Bilinearformen, euklidische und unitäre Vektorräume, normale Endomorphismen

Übungen

25. März 2011

Aufgabe 1: Geben Sie die symmetrische Matrix an, die zu jedem der folgenden quadratischen Polynome gehört:

1. $q(x, y) = 4x^2 - 6xy - 7y^2$
2. $q(x, y) = xy + y^2$
3. $q(x, y, z) = 3x^2 + 4xy - y^2 + 8xz - 6yz + z^2$
4. $q(x, y, z) = x^2 - 2yz + xz$

Aufgabe 2: Seien $u = (x_1, x_2)$ und $v = (y_1, y_2)$. Bestimmen Sie, welche der folgenden Ausdrücke bilineare Formen auf $\mathbb{R}^2$ sind.

1. $f(u, v) = 2x_1y_2 - 3x_2y_1$
2. $f(u, v) = x_1 + y_2$
3. $f(u, v) = 3x_2y_2$
4. $f(u, v) = x_1x_2 + y_1y_2$
5. $f(u, v) = 1$
6. $f(u, v) = 0$

Aufgabe 3:

1. Bestimmen Sie, welche der folgenden Matrizen hermitesch sind:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2+3i & 4-5i \\ 2-3i & 5 & 6+2i \\ 4+5i & 6-2i & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2-i & 4+i \\ 2-i & 6 & i \\ 4+i & i & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

2. Bestimmen Sie, welche der folgenden Matrizen normal ist:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 2+i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4: Sei $V = \mathbb{R}[x]_2$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad höchstens 2. Zeigen Sie, dass $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ ein Skalarprodukt auf V definiert.

Aufgabe 5:

1. Zeigen Sie, dass jedes skalare Vielfache von u ebenfalls zu v orthogonal ist, wenn u zu v orthogonal ist. Geben Sie einen Einheitsvektor v_3 an, der senkrecht zu $v_1 = (1, 1, 2)$ und $v_2 = (0, 1, 3)$ steht.
2. Wenden Sie das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren auf die 3 Vektoren an.
3. Sei W ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$, der durch $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ und $v = (2, 4, 7, 2, -1)$ aufgespannt wird. Geben Sie eine Basis des orthogonalen Komplements $W^\perp$ von W an.

Aufgabe 6: Sei T auf $\mathbb{C}^3$ definiert durch $T(x, y, z) = (2x + (1-i)y, (3+2i)x - 4iz, 2iz + (4-3i)y - 3z)$. Geben Sie $T^*(x, y, z)$ an.

Aufgabe 7: Entscheiden Sie ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind (kurze Begründung).

a) Für jede unitäre Matrix A gilt det(A)=1

b)Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 23 & 11 & -450 \\ 11 & -7 & 3 \\ -450 & 3 & 78 \end{pmatrix}$$

ist diagonalisierbar.

Aufgabe 8: Für $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ sei $F(A, B) = Spur(AB)$.

1. Zeigen Sie, dass F eine symmetrische Bilinearform ist.

2. Für die Standardbasis E von $\mathbb{R}^2 \times 2$ berechne man die Grammatrix $G_E(F)$.

Aufgabe 9: Überprüfen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10: Es seien die Standardbasis $S := \{(1,0),(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ sowie die Basen

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{und } C = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Ferner seien $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch:

$$\varphi((x_1, x_2)) := \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ 0 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} \text{und} \psi((x_1, x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 - x_3 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen ${}_B[\varphi]_S$, ${}_C[\psi]_B$ und ${}_C[\psi \circ \varphi]_S$.

Aufgabe 11: Sei $V = \mathbb{R}[z]_2$ und $f : V \leftarrow \mathbb{R}^2$ die Abbildung $p(z) \mapsto^t (p(1), p'(1))$, wobei p(1) bzw. p'(1) die Auswertung bzw. die Ableitung von p an der Stelle $z = 1$ bezeichnet.

Berechnen Sie ${}_R[f]_B$ mit $B = (1, z-1, (z-1)^2)$ und $R = ({}^t(1,0), {}^t(0,1))$ den Basen von V bzw. $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 12: Es sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^{n \times n}$, und es sei

$$S := \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \}$$

die Basis von V.

Es sei ferner $\varphi : V \mapsto V, \varphi(X) := X +^t X$.

Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix ${}_S[\varphi]_S$.