Musterlösung Donnerstag - Determinanten und Eigenwerte

26. März 2011

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(1) Zeige, dass eine nilpotente Endomorphismus nur die Null als Eigenwert hat.

Hinweis: Ein Endomorphismus heißt nilpotent, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $F^k = 0$.

Beweis:

$$F(v) = \lambda v \Rightarrow F^2(v) = \lambda^2 v \Rightarrow \cdots \Rightarrow F^k(v) = \lambda^k v \Rightarrow \lambda^k = 0$$

(2) Zeige, dass eine symmetrische 2×2-Matrix in $\mathbb{R}$ nur reelle Eigenwerte hat.

Beweis: Da A symmetrisch ist, lässt sie sich folgendermaßen schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

und dann folgt aus $\det(A - \lambda(1)_2) = 0$

$$\lambda_{\pm} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-d)^2}{4} + b^2} \in \mathbb{R}$$

(3) Zeige, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben.

Hinweis: Zwei Matrizen $A, \tilde{A}$ heißen zu einander ähnlich, falls es eine Matrix $S \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ gibt, so dass $\tilde{A} = SAS^{-1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} P_{\tilde{A}}(\lambda) &= \det(\tilde{A} - \lambda \mathbb{1}) \\ &= \det(SAS^{-1} - \lambda SS^{-1}) \\ &= \det(S) \cdot (\det(S))^{-1} \det(A - \lambda \mathbb{1}) \\ &= \det(A - \lambda \mathbb{1}) = P_A(\lambda) \end{aligned}$$

(4) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeige

$$P_F(0) \neq 0 \Leftrightarrow F \text{ ist isomorph}$$

Beweis: "$\Rightarrow$"

$$P_F(0) \neq 0 \Rightarrow P_F(0) = \det(A_F) \neq 0 \Rightarrow F \text{ ist ein Isomorphismus}$$

" $\Leftarrow$"

$$F \text{ ist ein Isomorphismus } \Rightarrow 0 \neq \det(A_F) = P_F(0)$$

(5) Zeige, das für $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

im Allgemeinen nicht gilt.

Beweis: Wir nehmen hier den Spezialfall $n = 2$ heraus und definieren uns

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dann ergibt sich

$$\det(A+B) = 1 \neq 0 = \det(A) + \det(B)$$

(6) Zeige, dass für ein invertierbares $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Beweis: Da A invertierbar ist gilt $A^{-1} \cdot A = \mathbb{1}_n$ und daher

$$\det(A^{-1} \cdot A) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) \det(A) = 1$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aufgabe 2: Determinanten

(1) Zeige, dass zu einer für meine Matrix $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Hinweis: Verwende die Leibniz-Formel.

Beweis: Sei $A = (a_{ij})$ für die Komponenten der transponierten Matrix $A^T = (b_{ij})$ gilt $b_{ij} = a_{ji}$, und somit

$$\begin{aligned} \det A^T &= \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\mathcal{P}) b_{1\mathcal{P}(1)} \cdots b_{n\mathcal{P}(n)} \\ &= \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\mathcal{P}) a_{\mathcal{P}(1)1} \cdots a_{\mathcal{P}(n)n} \\ &= \sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\mathcal{P}) a_{1\mathcal{P}^{-1}(1)} \cdots a_{n\mathcal{P}^{-1}(n)} \end{aligned}$$

Setzten wir nun $\sigma = \mathcal{P}^{-1}$, dann gilt $\mathrm{sign}(\mathcal{P}) = \mathrm{sign}(\sigma)$ und daher

$$\det A^T = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \det(A)$$

Was zu zeigen war.

(2) Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

(1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 6 = -2$$

(2) $\det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= 3\cdot\det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -3 - 2\cdot[6-15] \\ &= 15\end{aligned}$$

(3) $\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} &= 4\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= 4\cdot[1+10+4+1+4-10] + 2\cdot[-6+0+6-6-0-6] - \\ &\quad - 1\cdot[-30+0+3+12-0-3] = 34\end{aligned}$$

(4) $\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{aligned}&\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5+2(3) & 2+2(-2) & 8+2(-5) & -5+2(4) \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & -2+2(3) & -5+2(3) & 4-3(3) \\ 1 & -2+2(1) & -2+2(1) & 3-3(1) \\ -2 & 4+2(-2) & 7+2(-2) & -3-3(-2) \\ 2 & -3+2(2) & -5+2(2) & 8-3(2) \end{pmatrix} \\ &= \det\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= -\{24+3+0-[-15+0-12]\} = -54\end{aligned}$$

(3) Berechne die folgenden Determinanten

(1) $\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

Lösung: Mit der Sarrus-Regel erhält man

$$\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = x^3 + 1 + 1 - 3x = (x-1)^2(x+2)$$

Die Zerlegung am Ende kann man z.B. durch Berechnung der Nullstellen des Polynoms einsehen.

(2) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 + c^2 - abc - abc - abc = a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$$

(3) $\det\begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix} \\
&= (a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) + a^2b^2c^2 + a^2b^2c^2 - [a^2c^2(b^2+1) + a^2b^2(c^2+1) + b^2c^2(a^2+1)] \\
&= (a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1)(c^2+1) - a^2c^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2b^2c^2 \\
&= a^2b^2c^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 - a^2c^2 - a^2b^2 - b^2c^2 - a^2b^2c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + 1
\end{aligned}$$

(4) $\det\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$

Lösung: Man addiere die zweite Spalte zu der ersten Spalte und addiert dann die dritte Spalte zu der zweiten Spalte, dann erhält man

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} t+2 & 0 & 1 \\ t+2 & t-2 & 1 \\ 0 & t-2 & t+4 \end{pmatrix} \\
=&(t+2)(t-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & t+4 \end{pmatrix} = (t+2)(t-2)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t+4 \end{pmatrix} \\
=&(t+2)(t-2)(t+4)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (t+2)(t-2)(t+4)
\end{aligned}$$

(4) Sei $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, $y = (y_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass Folgendes gilt:

$$x \text{ und } y \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0 \;\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$$

Beweis: ”⇒”

$$\begin{aligned}
x_i = a \cdot y_i, \forall i \Rightarrow & \det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & \det\begin{pmatrix} a\cdot y_i & y_i \\ a\cdot y_j & y_j \end{pmatrix} \\
\Rightarrow & a^2 \det\begin{pmatrix} y_i & y_i \\ y_j & y_j \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

"$\Leftarrow$"

$$\det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_i y_j - y_i x_j = 0$$
$$\Rightarrow \frac{x_i}{y_i} = \frac{x_j}{y_j}, \forall i, j$$

Setze nun $\frac{x_i}{y_i} =: C$, dann gilt dies für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und daher folgt

$$x = c \cdot y$$

und x und y sind linear abhängig.

Aufgabe 3: Eigenwerte

(1) Sei λ ein Eigenwert zu einem invertierbaren $F \in \mathrm{End}(V)$, dann gilt λ^{-1} ist Eigenwert zu F^{-1}.

Hinweis: Kann ein invertierbarer Endomorphismus Null als Eigenwert haben?

Beweis: Die Antwort auf den Hinweis lautet 'Nein!'. Da $\det(F) = \prod_{i=0}^{k} \lambda_i$ gilt, würde aus der Annahme, dass Null Eigenwert sei, $\det(F) = 0$ folgen, was im Widerspruch zur angenommen Invertierbarkeit steht. Daher können wir im folgenden $\lambda_i \neq 0, \forall i$ annehmen.

$$\begin{aligned} & F(v) = \lambda v \\ \Leftrightarrow & F^{-1}(F(v)) = F^{-1}(\lambda v) \\ \Leftrightarrow & v = \lambda F^{-1}(v) \\ \Leftrightarrow & F^{-1}(v) = \lambda^{-1} v \end{aligned}$$

(2) 1 Zeige: Falls AB einen Eigenwert gleich Null hat, dann gilt, dass A oder B einen Eigenwert gleich Null hat. Gilt die Umkehrung ebenfalls?

Beweis: Angenommen, weder A noch B hätte einen Eigenwert gleich Null. Dann würde für jeden Vektor $v \neq 0$ gelten, dass $Bv \neq 0$, denn ansonsten wäre Null ein Eigenwert. Setzt man nun $w := Bv \neq 0$, dann muss aus dem selben Grunde $Aw \neq 0$ folgen. Daher schließt man $ABv \neq 0$ für jeden Vektor $v \neq 0$, was im Widerspruch zur Annahme steht, dass AB einen Eigenwert gleich Null haben soll.

Die Umkehrung gilt ebenfalls, nimmt man nämlich an, dass AB keinen Eigenwert gleich Null hat, dann folgt direkt, dass $Bv \neq 0$ für alle $v \neq 0$ und daher hat B keinen Eigenwert gleich Null, also $\det(B) \neq 0$. Daher ist B insbesondere surjektiv und für $v \neq 0$ beliebig ist $w := Bv \neq 0$ wiederum beliebig. Daher würde wiederum folgen, dass $Aw \neq 0$ für $w \neq 0$ und sowohl A, als auch B hätten keinen Eigenwert ungleich der Null. Widerspruch!

2 Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$, dann zeige, dass AB und BA die selben Eigenwerte haben.

Lösung: Mit dem ersten Satz aus dieser Aufgabe folgt direkt, dass falls Null ein Eigenwert von AB ist, dies auch für BA zutrifft.

Man nehme nun an, dass λ ein von Null verschiedener Eigenwert zu AB ist, dann existiert ein Vektor $v \neq 0$ derart, dass

$$(AB)v = \lambda v$$

gilt. Setze nun $w := Bv$, dann gilt, dass $w \neq 0$ ist, da $\lambda \neq 0$ und $v \neq 0$. Daher kann man aus

$$(BA)w = BABv = \lambda Bv = \lambda w$$

folgern, dass der Eigenwert λ von AB ebenfalls ein Eigenwert von BA ist.

(3) Berechne das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen und finde mit jenem deren Eigenwerte.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 1$$

und daraus ergeben sich die Eigenwerte

$$\lambda_\pm = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{21}$$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$P_B(\lambda) = -(\lambda^3 - 7\lambda^2 + 15\lambda - 9)$$

Zunächst ließt man hiervon ab, dass $\lambda = 1$ ein Eigenwert ist. Durch Polynomdivision erhält man dann

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

als weitere Bedingung für Eigenwerte. Damit erhält man, dass $\lambda = 1$ Eigenwert der Vielfachheit 1 und $\lambda = 3$ Eigenwert der Vielfachheit 2 ist.

(3) $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$P_C(\lambda) = -(\lambda^3 - 12\lambda - 16)$$

Zunächst ließt man den Eigenwert $\lambda = -2$ ab, und erhält dann durch Polynomdivision

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

als weitere Bedingung für Eigenwerte. Schließlich ergibt sich der Eigenwert 4 mit der algebraischen Vielfachheit von 1 und $\lambda = -2$ mit der algebraischen Vielfachheit von 2.

(4) Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

Lösung: Da das charkteristische Polynom

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$$

lautet, ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert der Matrix und diese ist damit nicht invertierbar.

(5) Zeige, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind und geben sie gegebenenfalls die Ähnlichkeitstransformation an.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$P_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2$$

und $\lambda = 2$ ist daher Eigenwert mit der algebraischen Vielfachheit 2. Wir berechnen nun den Eigenraum zu diesem Eigenwert

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = -a_2$$
$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Eig}(A,2)) = 1 \leq 2 = \mu\left((\lambda-2)^2, 2\right)$$

und daher ist die Matrix nicht diagonalisierbar.

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$P_B(\lambda) = -(\lambda^3 - 12\lambda - 14)$$

Daraus errät man die Nullstelle $\lambda = -2$ und erhält im Folgenden durch Polynomdivision

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

als zusätzliche Bedingung für die Eigenwerte. Daraus ergibt sich schließlich, dass $\lambda = -2$ ein Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda = 4$ ein solcher mit algebraischer Vielfachheit 1 ist.

Als Nächstes berechnen wir die Basis zu dem Eigenraum $\mathrm{Eig}(B, -2)$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x - y + z = 0$$

Daher erhält man zwei linear-unabhängige Lösungen, z.B.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und es gilt $\dim \mathrm{Eig}(B, -2) = 2 = \mu(P_B, -2)$.

Jetzt folgt der Eigenraum zu $\lambda = 4$ und man erhält als Bedingung

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x & = y \\ 2y & = z \end{cases}$$

Daher ist der Lösungsraum wie erwartet eindimensional und als Basisvektor bietet sich

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

an.

Die Matrix für die Ähnlichkeitstransformation lautet bei unserer Wahl der Basis

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und es gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(3) $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \; a, b \in \mathbb{R}$

Hinweis: Hier ist keine Transformationsmatrix anzugeben!

Lösung: Das charakteristische Polynom lautet

$$P_C(\lambda) = (-3 - \lambda)(b - \lambda)(2 - \lambda)$$

und daher ergibt sich für die Eigenwerte

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3 \\ \lambda_2 &= b \\ \lambda_3 &= 2 \end{aligned}$$

Für die Fälle $b \neq 2$ und $b \neq -3$ sind alle Eigenwerte paarweise verschieden und die Matrix daher für alle $a \in \mathbb{R}$ diagonalisierbar. Wir machen nun eine Fallunterscheidung:

Für $b = 2$ nimmt die Eigenwertgleichung für den doppelten Eigenwert $\lambda = 2$ die Form

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

an, und man erählt $x_1 = 0$ sowie $ax_3 = 0$. Für $a = 0$ folgt, dass x_2 und x_3 frei wählbar sind und somit für den Eigenraum $\dim(\mathrm{Eig}(C, 2)) = 2$ gilt. Ist aber $a \neq 0$ so erhält man $x_3 = 0$ und nur noch x_2 ist frei wählbar. Daher ist in diesem letzteren Fall $\dim(\mathrm{Eig}(C, 2)) = 1$ und die Matrix ist nicht diagonalisierbar.

Nun der Fall $b = -3$. Dann muss der doppelte Eigenwert $\lambda = -3$ kritisch begutachtet werden. Man erhält aus der Eigenwertgleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $a = 5$ erhält man $2x_1 + x_3 = 0$ und x_2 frei wählbar, dann ist $\dim(\mathrm{Eig}(C, -3)) = 2$ und die Marix ist diagonalisierbar. Ist aber $a \neq 5$, so folgt $x_1 = x_3 = 0$ und nut noch x_2 frei wählbar und daher $\dim(\mathrm{Eig}(C, -3)) = 1$ und somit echt kleiner als der die algebraische Vielfachheit und somit nicht diagonalisierbar.

(6) Gib alle Eigenwerte und eine Basis jedes Eigenraumes des Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ an, welcher durch

$$F(x, y, z) := \begin{pmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + 4z \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ist F diagonalisierbar?

Lösung: Die darstellende Matrix in der Standard-Basis des $\mathbb{R}^3$ von ist durch

$$A_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Damit ergibt sich als charakteristisches Polynom

$$P_F(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 3)$$

und daher sind $2, 3$ Eigenwerte von F.

Wir berechnen die Eigenvektoren zum Eigenwert 2. Diese ergeben sich aus

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y & = 0 \\ y + z & = 0 \\ -2y - 2z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y & = 0 \\ z & = 0 \\ x & \text{beliebig} \end{cases}$$

Daher ist $\dim \ker(F - \lambda \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}) = 1 < 2 = \mu(F, 2)$ (geometrische Vielfachheit echt kleiner der algebraischen Vielfachheit) und F ist nicht diagonalisierbar. Eine mögliche Wahl eines Eigenvektors zu $\lambda = 2$ wäre

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

was somit auch eine Basis für den Eigenraum $\mathrm{Eig}(F, -3)$ darstellt.

Für die Basis des Eigenraumes zu $\lambda = 3$ setzt man an

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y & = 0 \\ 2y + z & = 0 \\ -2y - z & = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y & = 0 \\ 2y + z & = 0 \end{cases}$$

Eine mögliche Wahl für die Basis wäre

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(7) Berechnen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen und geben sie die Jordanbasis an.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Beweis: Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)^3$$

dann ist $\dim \mathrm{Hau}(A, 1) = 3$ und es gilt mit $G := A - 1 \cdot \mathbb{1}_3$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad G^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ergibt sich

$$U_0 = \{0\} \subset U_1 = \mathrm{span}\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \} \subset U_2 = \mathbb{R}^3$$

Dann ergibt sich sofort

$$s_2 = 6 - 3 - 2 = 1$$
$$s_1 = 4 - 3 - 0 = 1$$

und man kann daher einfach die Jordan-Normalform von A angeben, die da lautet

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir wählen als Basis für W_2 den Vektor

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und erhalten damit den ersten Vektor für W_1 und zwar

$$G(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Da aber W_1 zweidimensional sein muss, ergänzen wir $G(e_2)$ durch e_3. Das Schema ergibt dann

$$\begin{array}{ll} e_2 & \\ G(e_2) & e_3 \end{array}$$

und die Jordanbasis schreibt sich

$$\mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Außerdem erhalten wir die Transformationsmatrix

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit der sich wieder die Jordan-Normalform erschließen lässt

$$A_J = TAT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

Lösung: Das charakteristische Polynom ist

$$P_B(\lambda) = (2 - \lambda)^2$$

und wegen

$$G = B - 2 \cdot \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$$

ist die Matrix nicht diagonalisierbar. Aber es gilt

$$U_0 \subset U_1 = \operatorname{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset U_2 = \mathbb{R}^2$$

und daher

$$s_2 = 1$$
$$s_1 = 0$$

und tada:

$$B_J = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Zur Berechnung der Basis wählen wir e_2 als Basisvektor für W_2 und erhalten

$$G(e_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Daher schreibt die Basis als

$$\mathcal{B} = \left(b_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

und ebenso die Transformationsmatrix

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

(3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: Die Aufgabe aus der Vorlesung!

Lösung:

Das charakteristische Polynom lautet

$$P_F(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda + 1)^2$$

Für den Eigenwert $\lambda = 2$

$$G_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

und ein möglicher Basisvektor des zugehörigen Eigenraumes ist

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den Eigenwert $\lambda = -1$ erhält man

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad G_1^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Man erhält $\dim \mathrm{Eig}(C, -1) = 1 < 2 = \mu(C, -1)$ und daher ist die MAtrix C nicht diagonalisierbar. Für den Eigenraum gibt es z.B. den Basisvbektor

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und man erhält für den Hauptraum

$$\mathrm{Hau}(C, -1) = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0\}$$

und mögliche Basisvektoren sind

$$h_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad , \quad h_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Nun muss man zur Bestimmung der richtigen Basis den Endomorphismus G_1 auf den Hauptraum $\mathrm{Hau}(C,-1)$ einschränken. Dies erreicht man durch Darstellung von G_1 in der Basis von $\mathrm{Hau}(C,-1)$:

$$G_1(h_1) = -h_1 + h_2$$
$$G_1(h_2) = -h_1 + h_2$$

und man erhält die Darstellungsmatrix von G_1 ind $\mathrm{Hau}(C,-1)$

$$G_1^{(h)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hier kann man wieder das Schema auf der Vorlesung anwenden und man erhält

$$U_0 \subset U_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\} \subset U_2 = \mathbb{R}^2$$

Für die Zerlegung $\mathbb{R}^2 = W_1 \oplus W_2$ wählt man

$$W_2 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

und somit nach dem Schema

$$W_1 = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

die geordnete Basis lautet daher

$$B_1^{(h)} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Nun muss man diese Vektoren wieder in der ursprünglichen Basis darstellen

$$B_1 = \left(-h_1 + h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$$

und die Jordanbasis lautet

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Die Matrix C stellt sich nun in Jordan-Normalform durch

$$C_J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

dar.