Angabe Donnerstag - Determinanten und Eigenwerte

26. März 2011

Aufgabe 1: Zum Aufwärmen

(1) Zeige, dass eine nilpotente Endomorphismus nur die Null als Eigenwert hat.

Hinweis: Ein Endomorphismus heißt nilpotent, falls es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $F^k = 0$.

(2) Zeige, dass eine symmetrische 2×2-Matrix in $\mathbb{R}$ nur reelle Eigenwerte hat.

(3) Zeige, dass ähnliche Matrizen das gleiche charakteristische Polynom haben.

Hinweis: Zwei Matrizen $A, \tilde{A}$ heißen zu einander ähnlich, falls es eine Matrix $S \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ gibt, so dass $\tilde{A} = SAS^{-1}$.

(4) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeige

$$P_F(0) \neq 0 \Leftrightarrow F \text{ ist isomorph}$$

(5) Zeige, das für $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$

$$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$$

im Allgemeinen nicht gilt.

(6) Zeige, dass für ein invertierbares $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Aufgabe 2: Determinanten

(1) Zeige, dass zu einer für meine Matrix $A \in \mathcal{M}(n \times n, \mathbb{K})$ gilt

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Hinweis: Verwende die Leibniz-Formel.

(2) Berechnen Sie die folgenden Determinanten.

(1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(4) $\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$

(3) Berechne die folgenden Determinanten

(1) $\det\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$

(2) $\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$

(3) $\det\begin{pmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{pmatrix}$

(4) $\det\begin{pmatrix} t+3 & -1 & 1 \\ 5 & t-3 & 1 \\ 6 & -6 & t+4 \end{pmatrix}$

(4) Sei $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass Folgendes gilt:

$$x \text{ und } y \text{ sind linear abhängig} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{pmatrix} = 0 \; \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Aufgabe 3: Eigenwerte

(1) Sei λ ein Eigenwert zu einem invertierbaren $F \in \mathrm{End}(V)$, dann gilt λ^{-1} ist Eigenwert zu F^{-1}.

Hinweis: Kann ein invertierbarer Endomorphismus Null als Eigenwert haben?

(2) 1 Zeige: Falls AB einen Eigenwert gleich Null hat, dann gilt, dass A oder B einen Eigenwert gleich Null hat. Gilt die Umkehrung ebenfalls?

2 Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{K})$, dann zeige, dass AB und BA die selben Eigenwerte haben.

(3) Berechne das charakteristische Polynom der folgenden Matrizen und finde mit jenem deren Eigenwerte.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

(4) Ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

(5) Zeige, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind und gebe gegebenenfalls die Ähnlichkeitstransformation an.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $C = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \ a, b \in \mathbb{R}$

Hinweis: Hier ist keine Transformationmatrix anzugeben!

(6) Gib alle Eigenwerte und eine Basis jedes Eigenraumes des Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ an, welcher durch

$$F(x, y, z) := \begin{pmatrix} 2x + y \\ y - z \\ 2y + 4z \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ist F diagonalisierbar?

(7) Berechnen Sie die Jordan-Normalform der folgenden Matrizen und geben sie die Jordanbasis an.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

(3) $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Hinweis: Die Aufgabe aus der Vorlesung!