Lineare Gleichungssysteme und Matrizenrechnung

# Musterlösung

23. März 2011

**Aufgabe 1** Lösen Sie die folgenden LGS:

1.
$$\begin{aligned} 2x + y - 2z + 3w &= 1 \\ 3x + 2y - z + 2w &= 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w &= 5 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \\ 2x + 6y + 2z &= 22 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z + 3w &= 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w &= 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w &= 12 \end{aligned}$$

<u>Lösung:</u>

1.
$$\begin{matrix} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - z + 2w = 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w = 5 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ y + 4z - 5w = 5 \\ 3y + 12z - 15w = 7 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} 2x + y - 2z + 3w = 1 \\ y + 4z - 5w = 5 \\ 0 = -8 \end{matrix}$$

Forme im 2. Schritt mit der 1. Zeile um, im 3. Schritt mit der 2. Zeile.

Das System hat keine Lösung, da die letzte Zeile einen Widerspruch darstellt.

2.
$$\begin{matrix} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y + z = 11 \\ 2x + 5y - 4z = 13 \\ 2x + 6y + 2z = 22 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ y + 2z = 5 \\ 2y + 8z = 14 \end{matrix} \;\rightarrow\; \begin{matrix} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 4z = 7 \\ 2z = 2 \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

Forme im 2. Schritt mit der 1. Zeile um, und dann mit der 2.

Es gibt eine eindeutige Lösung, da es 3 Gleichungen für 3 Unbekannte gibt: z=1, y=3, x=1.

3.

$$\begin{aligned} x + 2y - 2z + 3w &= 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w &= 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w &= 12 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y - 2z + 3w &= 2 \\ z - 2w &= 1 \\ 2z - 4w &= 2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} x + 2y - 2z + 3w &= 2 \\ z - 2w &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Forme wieder im 2. Schritt mit der 1. Zeile um.

Es gibt hier mehr Unbekannte als Gleichungen, also gibt es unendlich viele Lösungen. Es gibt 2 freie Variablen y und w. $w = a, y = b, z = 1 + 4w \rightarrow z = 1 + 2a, x = 2 - 2y + 2z - 3w \rightarrow x = 4 - 2b + a$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 - 2b + a \\ b \\ 1 + 2a \\ a \end{pmatrix} \;, \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

**Aufgabe 2:** Entscheiden sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. Jedes LGS hat eine Lösungsmenge.
2. Jedes homogene LGS mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.
3. Jedes inhomogene LGS mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar.

Lösung:

1. Richtig, denn selbst ein unlösbares System hat $\mathbb{L} = \emptyset$.
2. Richtig, ein homogenes LGS hat immer die triviale Lösung 0. Für ein LGS mit mehr Unbekannten als Lösungen gilt: $n > r$, also $n - r > 1$. Es gibt also mindestens einen freien Parameter und somit noch mindestens eine weitere Lösung.

3. Falsch, Gegenbeispiel:
$$\begin{aligned} 2x + 2y + z &= 5 \\ 3y + 2z &= 5 \\ x + z &= 2 \\ y &= 1 \end{aligned}$$
mit x = y = z = 1

**Aufgabe 3:** Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Matrixprodukt nicht kommutativ ist.

<u>Lösung:</u>

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe 4:**

1. Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ für
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$
2. Es seien die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 3 \\ a_{21} & 1 & 3 \\ a_{31} & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & b_{22} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$
gegeben mit $A \cdot B = C$. Bestimmen Sie $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}$.

<u>Lösung:</u>

1.
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 27 \\ 22 & 5 \\ -11 & 25 \\ 23 & 3 \end{pmatrix}$$

2. $a_{11} = 1,\ a_{21} = 2,\ a_{31} = 0,\ b_{22} = -2,\ c_{13} = 11,\ c_{23} = 10,\ c_{33} = -6$

**Aufgabe 5:** Bringen Sie die folgenden Matrizen in Stufenform und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right), \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

<u>Lösung:</u>

1.
$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

y ist freier Parameter

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5-2a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$$

2.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

Im 3. Schritt wird mit der 1. Zeile umgeformt. Am Ende erhält man in der letzten Zeile $0 = -8$, das System hat also keine Lösung.

3.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -14 & 42 \end{array}\right)$$

Umformen erst mit der 1. Zeile, dann mit der 2.

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

**Aufgabe 6:** Invertieren Sie die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z_2 \leftarrow Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 - 4Z_1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_2 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z_1 \leftarrow Z_1 - 2Z_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ Z_2 \leftarrow Z_2 + 2Z_1 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 + 4Z_1 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -6 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ Z_3 \leftarrow 5Z_3 - 6Z_2 \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -25 & 18 & -15 \\ 0 & 5 & 0 & 50 & -35 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z_1 \leftarrow Z_1 - 3Z_3 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 + 6Z_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & -7 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & -6 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} Z_1 \leftarrow Z_1 + 2Z_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

3.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad Z_3 \leftarrow 2Z_3 - 5Z_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad Z_2 \leftarrow Z_2 + Z_3$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \quad Z_3 \leftarrow -Z_3 - Z_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 16 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right) \quad Z_1 \leftarrow Z_1 - Z_2 + Z_3 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

4.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & -6 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} Z_2 \leftarrow Z_2 - 3Z_1 \\ Z_3 \leftarrow Z_3 + Z_1 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 6 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} Z_2 \leftarrow -Z_2 \\ Z_3 \leftarrow 5Z_3 + 4Z_2 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 29 & -16 & -20 \\ 0 & 10 & 0 & 45 & -25 & -30 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} Z_1 \leftarrow Z_1 - 4Z_3 \\ Z_2 \leftarrow Z_2 - 6Z_3 \end{array}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{2} & \frac{-17}{2} & -11 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{-5}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & 4 & 5 \end{array}\right) \quad Z_1 \leftarrow Z_1 - 3Z_2$$

**Aufgabe 7:** Bestimmen Sie eine Basis für den Untervektorraum

$$U = spann\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^4$ und geben Sie die Dimension von U an.

Gleiche Aufgabe für:

$$U = spann\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^3$.

Lösung:

1.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -11 & -4 & -3 \\ 1 & 4 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Basis von U ist:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

dim(U)=3

2.
$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Basis von U ist:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

dim(U)=2

**Aufgabe 8:** Gegeben seien die Untervektorräume

$$U_1 = spann\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \text{ und } U_2 = spann\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $U_1 \cap U_2 = spann(v)$.

Lösung:

$$v = a\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix}$$

$$a\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\4\\-4\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 2 & 0\\ -3 & 4 & 1 & -1 & 0\\ 2 & -4 & -1 & 0 & 0\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & 7 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)$$

$$\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix}-\lambda\\-\lambda\\2\lambda\\\lambda\end{pmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Wähle $\lambda = 1$

$$v = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 9:** Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5\\ 3 & 6 & 9 & 4 & 8 & 3\end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -2\\ 5 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

<u>Lösung:</u>

Rang(A)=3, Rang(B)=2