Lineare Gleichungssysteme und Matrizenrechnung

Übungen

23. März 2011

Aufgabe 1: Lösen Sie die folgenden LGS:

1.
$$\begin{aligned} 2x + y - 2z + 3w &= 1 \\ 3x + 2y - z + 2w &= 4 \\ 3x + 3y + 3z - 3w &= 5 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ x + 3y + z &= 11 \\ 2x + 5y - 4z &= 13 \\ 2x + 6y + 2z &= 22 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} x + 2y - 2z + 3w &= 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w &= 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w &= 12 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Entscheiden sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind, geben Sie eine kurze Begründung oder ein Gegenbeispiel.

1. Jedes LGS hat eine Lösungsmenge.
2. Jedes homogene LGS mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens 2 Lösungen.
3. Jedes inhomogene LGS mit mehr Gleichungen als Unbekannten ist unlösbar.

Aufgabe 3: Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass das Matrixprodukt nicht kommutativ ist.

Aufgabe 4:

1. Berechnen Sie das Produkt $A \cdot B$ für

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$$

2. Es seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 2 & 3 \\ a_{21} & 1 & 3 \\ a_{31} & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & b_{22} & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 & c_{13} \\ 4 & -3 & c_{23} \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$

gegeben mit $A \cdot B = C$. Bestimmen Sie a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}.

Aufgabe 5: Bringen Sie die folgenden Matrizen in Stufenform und geben Sie die Lösungsmenge an.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 15 \end{array}\right) \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \quad , \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

Aufgabe 6: Invertieren Sie die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7: Bestimmen Sie eine Basis für den Untervektorraum

$$U = spann\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -11 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^4$ und geben Sie die Dimension von U an.

Gleiche Aufgabe für:

$$U = spann\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 8: Gegeben seien die Untervektorräume

$$U_1 = spann\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}\right) \text{ und } U_2 = spann\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft $U_1 \cap U_2 = spann(v)$.

Aufgabe 9: Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$