Technische Universität München

Ferienkurs Lineare Algebra 1

Gruppen, Ringe, Körper und Vektorräume

Aufgaben

22. März 2011

Tanja Geib

Aufgabe 1

Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe mit neutralem Element e, und es gelten für alle $g \in G$ die Gleichung $g^2 = e$. Beweisen Sie, dass $(G, \cdot)$ eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ mit der üblichen punktweisen Addition und skalaren Multiplikation und die Mengen

$$G = \{f \in V : \; f(x) = f(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{f \in V : \; f(x) = -f(-x) \; \forall x \in \mathbb{R}\}$$

Beweisen Sie: G und U sind $\mathbb{R}$-Vektorräume.

Aufgabe 3

Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie: G ist genau dann abelsch, wenn die Abbildung $\varphi : G \to G, \; x \mapsto x^2$ ein Homomorphismus ist.

Aufgabe 4

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ seien Unterräume U_1 und U_2 gegeben durch

$$U_1 = span((-1, 2, 3), (-1, 5, 5))$$

$$U_2 = span((2, -2, 1), (-1, 3, -2))$$

Bestimmen Sie die Dimensionen $dim(U_1), dim(U_2), dim(U_1 + U_2)$ und $dim(U_1 \cap U_2)$.

Aufgabe 5

Beantworten Sie folgende Fragen durch Ankreuzen mit „Ja“ oder „Nein“. Es sind keine Begründungen anzugeben.

Sind die folgenden Aussagen richtig?	
Jeder Vektorraum hat eine Basis.	☐ Ja ☐ Nein
Die Menge $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x + y + z = 1\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$.	☐ Ja ☐ Nein
Eine linear unabhängige Teilmenge eines Vektorraumes enthält niemals den Nullvektor.	☐ Ja ☐ Nein
Die Komposition $g \circ f$ zweier injektiver Abbildungen $f : A \to B$ und $g : B \to C$ (A,B,C Mengen) ist immer injektiv.	☐ Ja ☐ Nein
Die Vereinigung zweier Unterräume eines Vektorraumes ist stets wieder ein Unterraum.	☐ Ja ☐ Nein
Der Durchschnitt zweier Unterräume eines Vektorraumes ist stets wieder ein Unterraum.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 6

Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

(a) $\mathbb{N}_0 := \{0\} \cup \mathbb{N}$ ist mit der üblichen Addition eine Gruppe.

(b) Dei Menge $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$.

(c) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} -12 & 0 & 34 & -10 \\ 5 & -50 & 6 & 1 \\ -66 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 4}$ hat den Rang 4.

Aufgabe 7

Welche der folgenden Abbildungen φ sind Gruppehomomorphismen? Bestimmen Sie gegebenenfalls $Kern(\varphi)$ und $Bild(\varphi)$. Antworten nur kurz begründen.

(a) $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot), \ x \mapsto e^{3x}$.

(b) $\varphi : (Aut(\{1, 2, 3\}), \circ) \to (Aut(\{1, 2, 3\}), \circ), \ \pi \mapsto (2\ 1\ 3) \circ \pi$.

(c) $\varphi : (\mathbb{Z}_4, \oplus_4) \to (\mathbb{Z}_4, \oplus_4), \ x \mapsto x \oplus_4 x$.

(d) $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, +), \ x \mapsto x^2$.

Aufgabe 8

Es sei $K := \{0, 1, a, b\}$ eine Menge mit 4 paarweise verschiedenen Elementen. Füllen Sie die folgenden Tabellen so aus, dass K zusammen mit den Abbildungen $+ : K \times K \to K$ und $\cdot : K \times K \to K$ ein Körper ist. Begründen Sie kurz.

+	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

$\cdot$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

Aufgabe 9

Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathbb{R}^3$ seien die Unterräume U_1 und U_2 gegeben durch

$$U_1 = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \{a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

$$U_2 = span(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \{a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R}\},$$

Geben Sie einen Vektor u an mit $U_1 \cap U_2 = span(u)$ und zeigen Sie $V = U_1 + U_2$.

Aufgabe 10

Gegeben seien der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ und die Vektoren

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Entscheiden Sie für folgenden Mengen jeweils, ob sie linear abhängig sind:

(i) $\{x_1, x_2, x_3\}$, (ii) $\{x_1, x_2, x_4\}$, (iii) $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, (iv) $\{x_2, x_3, x_4\}$, (v) $\{x_1{+}x_2, x_3\}$.

(b) Für welche der Mengen kann man $y = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Linearkombination schreiben?

Aufgabe 11

Beantworten Sie folgende Fragen durch Ankreuzen mit „Ja“ oder „Nein“. Es sind keine Begründungen anzugeben.

Es sei K ein Körper.

Gelten folgende Aussagen für jeden K-Vektorraum V?	
$(V\backslash\{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative Gruppe	☐ Ja ☐ Nein
$(K, \cdot)$ ist kommutative Gruppe.	☐ Ja ☐ Nein
$\forall\lambda, \mu \in K, v \in V$ gilt $(\lambda\mu)v = \mu(\lambda)v$.	☐ Ja ☐ Nein
$\forall\lambda, \mu \in K, v \in V$ gilt $\lambda(v + \mu) = \lambda v + \lambda\mu$.	☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 12

Beantworten Sie folgende Fragen durch Ankreuzen mit „Ja“ oder „Nein“. Es sind keine Begründungen anzugeben. Wir betrachten die Menge

$$M = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Sind die folgenden Aussagen wahr?	
$span(v_2, v_3, v_5) = span(v_3, v_5)$	☐ Ja ☐ Nein
$span(v_2, v_3, v_5) = span(v_1, v_3, v_5)$	☐ Ja ☐ Nein
$span(v_1, v_5, v_6) = span(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$	☐ Ja ☐ Nein
$span(v_1, v_2, v_4) = span(v_2, v_3, v_5, v_6)$	☐ Ja ☐ Nein