Lukas Neumeier & Christoph Schnarr & Michael Schrapp

Ferienkurs *Quantenmechanik* Sommer 2010

Probeklausur

1 Starrer Rotator

Ein starrer Rotator mit dem Trägheitsmoment I werde durch den Hamiltonoperator

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \frac{1}{2 \cdot I} \vec{L}^2$$

beschrieben, wobei $\vec{L}$ der Drehimpulsoperator ist.

1. Welche Werte kann die Energie des Systems annehmen und wie ist der Entartungsgrad der Energieeigenwerte?

2. Der Rotator besitze nun ein magnetisches Dipolmoment $\vec{\mu}$. In einem äußeren Magnetfeld $\vec{B}$ führt das zu einem Wechselwirkungsterm

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos\theta$$

   $\hat{\mathcal{H}}_1$ soll als Störung behandelt werden. Berechnen Sie die erste nicht verschwindende Korrektur für die Grundzustandenergie des Rotators.

Hinweis: Es gilt für die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \phi) : Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$ und $Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$
Drücken Sie $\hat{\mathcal{H}}_1$ durch die Kugelflächenfunktionen aus und verwenden Sie die Orthogonalitätsrelation.

2 WKB-Näherung

Berechnen Sie mit der WKB-Näherung die Energie-Eigenwerte eines Teilchens, welches einen gebundenen Zustand in folgendem Potential einnimmt:

$$V = F \cdot |x|$$

3 Spin-Kopplung

Ein System aus zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen wird durch einen Hamiltonoperator der Form

$$H = A(S_{1z} + S_{2z}) + B\vec{S_1} \cdot \vec{S_2}$$

beschrieben, wobei A und B konstant sind.

1. Bestimmen Sie alle Energieeigenwerte des Systems.

Hinweis: Sie müssen nicht die Eigenzustände nochmals bestimmen. Wählen Sie als Basis die gemeinsamen Eigenzustände von $\vec{S}^2 = (\vec{S_1} + \vec{S_2})^2$,$S_z$, $\vec{S_1}^2$ und $\vec{S_2}^2$

Erinnerung: Das Singulett und das Triplett!

Letzter Tipp: Versuchen Sie $\vec{S_1} \cdot \vec{S_2}$ durch geeignetere Operatoren auszudrücken.

4 Operatoren

1. Zeigen Sie beim eindimensionalen harmonischen Oszillator, dass folgende Kommutatorrelationen für die Auf- bzw. Absteigeoperatoren und den Teilchenzahloperator n gelten:

$$[n, \hat{a}] = -\hat{a} \tag{1}$$
$$\left[n, \hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}^\dagger \tag{2}$$

   Hinweis: Es darf $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ verwendet werden.

2. Berechnen Sie: $[\widehat{p}, x^n]$ für $n \geq 1$
3. Berechnen Sie: $\left[x^{-1}, \widehat{p}\right]$
4. Berechnen Sie: $[\widehat{p}^n, x]$ für $n \geq 1$

   Hinweis: Der Operator $\widehat{x}$ ist in Impulsdarstellung gegeben durch: $\widehat{x} = -\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dp}$.

5 Potentialbarriere (ehemalige Klausuraufgabe)

Ein Teilchen der Masse m und kinetischer Energie $E < U$ trifft von links auf eine Potentialbarriere der Form

$$V(x) = \begin{cases} U > 0 & \text{für } 0 < x < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

1. Zeigen Sie, dass diese Situation durch eine Wellenfunktion der Form

$$\psi(x) = \begin{cases} \rho e^{-ikx} + e^{ikx} & \text{für } x < 0 \\ Ae^{-\kappa x} + Be^{\kappa x} & \text{für } 0 < x < a \\ \tau e^{ik(x-a)} & \text{für } x > a \end{cases}$$

   dargestellt werden kann und bestimmen Sie k und κ als Funktion von m, E und U.

2. Zeigen sie, dass

$$\tau = \frac{4ik\kappa}{(k+i\kappa)^2 e^{\kappa a} - (k-i\kappa)^2 e^{-\kappa a}}$$

   gilt.

3. Wie nennt man den sich hier andeutenden Effekt? Nennen Sie 2 Beispiele, wo dieser Effekt in der Natur oder Technik auftritt.