Christoph Schnarr & Michael Schrapp

Ferienkurs *Quantenmechanik* – Sommer 2010

(Näherungsverfahren)

1 Ritzsches Variationsverfahren

Für das angegebene Potential

$$V(x) = \begin{cases} fx & \text{für } x > 0 \\ +\infty & \text{für } x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

führe man das Variationsverfahren unter Verwendung der Versuchsfunktionenschar $u(x)$ mit dem Variationsparameter α durch:

$$u(x) = xe^{-\alpha x}$$

Geben Sie die dazugehörige minimierte Energie an.

Geben Sie zudem ein Beispiel an, wo dieses Potential in der Realität auftauchen kann.

Hinweis: Die Formel $\int\limits_0^\infty dx\, x^n\, e^{-px} = \frac{n!}{p^{n+1}}$ kann hilfreich sein.

2 Störungstheorie 1. Ordnung

Zwei identische Teilchen befinden sich in einem unendlich hohen Potentialtopf mit Wänden bei $x = 0$ und $x = a$. Für die Einteilchenwellenfunktion gilt:

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Wir lassen die beiden Teilchen über das Potential

$$V(x_1, x_2) = -aV_0\delta(x_1 - x_2)$$

schwach miteinander wechselwirken.

1. Berechnen Sie die Grundzustandsenergie in erster Ordnung Störungstheorie.

3 Eckige Versuchswelle

Gegeben Sei ein Teilchen in einem Potentialkasten mit unendlich hohen Wänden und der Breite L.

Als Versuchswellenfunktion sei

$$\psi(x) = A \begin{cases} L - |x| & \text{für } |x| < L \\ 0 & \text{für } |x| > L \end{cases} \tag{2}$$

gegeben.

1. Bestimmen Sie die Normierungskonstante A.
2. Schätzen Sie die Grundzustandsenergie ab und vergleichen sie es mit dem exakten Resultat $E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{8mL^2}$.

4 Oszillator mit quadratischer Störung

Gegeben sei die Lösung des eindimensionalen harmonischen Oszillators:

$$\widehat{\mathcal{H}}_0 = \frac{\widehat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2}{2}\widehat{x}^2 \tag{3}$$

$$\widehat{H}_0 |n\rangle = \epsilon_n |n\rangle \tag{4}$$

$$\epsilon_n = \hbar\omega_0 \left(n + \frac{1}{2}\right) \tag{5}$$

Nun soll das gestörte System mit dem Hamiltonoperator

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V} \tag{6}$$

betrachten werden, wobei:

$$\widehat{V} = \lambda \widehat{x}^2 \tag{7}$$

$$(\lambda > 0). \tag{8}$$

1. Berechnen Sie die Energieverschiebungen in 1. und 2. Ordnung Störungstheorie.
2. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit dem exakten Resultat.

5 Asymptotik von WKB-Wellenfunktionen

Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten der WKB-Wellenfunktion tief im klassisch verbotenen Bereich, also im Grenzfall $x \to \infty$, für

1. das lineare Potential $V(x) = F \cdot x$ mit $F > 0$.
2. das Potential $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ des harmonischen Oszillators.

Hinweise zu 2.:

- $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2 \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\right] + C$
- Entwickeln Sie den Integranden in der Exponentialfunktion für große x