1 Drehimpulsalgebra

(a) Beweisen Sie die nachfolgenden Kommutatoren mit der bekannten Kommutatorrelation von x und p.

$$[L_z, x] = i\hbar y \quad [L_z, y] = -i\hbar x \quad [L_z, z] = 0$$

$$[L_z, p_x] = i\hbar p_y \quad [L_z, p_y] = -i\hbar p_x \quad [L_z, p_z] = 0$$

(b) Nutzen Sie diese Kommutatoren um zu zeigen, dass $[L_x, L_y] = i\hbar L_y$

(c) Berechnen Sie die Kommutatoren von $[L_z, r^2]$ und $[L_z, p^2]$

(d) Zeigen Sie das der Hamiltonoperator $H = \frac{p^2}{2m} + V$ mit allen drei Komponenten des Drehimpulses kommutiert, vorrausgesetzt V ist ein Zentralpotential ($V(\vec{r}) = V(r)$)

2 Dreidimensionale SG - sphärischer Potentialtopf

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem radialsymmetrischen Potential der From

$$V(r) = \begin{cases} 0 & r > r_0 \\ -V_0 & r < r_0 \end{cases}$$

Es sei $V_0 > 0$. In dieser Aufgabe sollen die Wellenfunktionen der gebundenen Zustände gesucht werden.

→ Stellen Sie die SG für die Bereiche $r < r_0$ und $r > r_0$ in Kugelkoordinaten auf.

→ Aufgrund der Lösung von Aufgabe 1d wissen wir, dass H und L gemeinsame Eigenfunktionen haben. Nutzen Sie dies durch einen Seperationsansatz für $\psi(r, \theta, \phi)$ aus und bestimmen Sie die radiale Schrödingergleichung.

→ Für den Rest der Aufgabe kann l=0 angenommen werden. Bestimmen Sie die Wellenfunktionen dieses Zusandes

→ Wie lauten die Randbedingungen an die Wellenfunktion ?

→ Leiten Sie aus den Randbedingungen die Form der Wellengleichung und eine Bedingung, aus der die Energien der Bindung gewonnen werden können, her.

→ Normieren Sie die Wellenfunktion

3 Elektron im Magnetfeld

(a) Gegeben sei ein ruhendes Elektron, welches sich im normierten Eigenzustand des Operators S_y mit Eigenwert $\frac{\hbar}{2}$ befindet. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvekoren des Operators S_y und drücken Sie den Zustand, in dem sich das Elektron befindet, durch die Eigenzustände $\mid \pm\rangle$ von σ_z aus.

(b) Betrachten Sie nun den Fall, dass sich das Elektron in einem konstanten magnetsichen Feld B befindet, welches in z-Rtg. zeigt, d.h. der zugehörige Hamilton- Operator hat die Form

$$H = -\mu_b B S_z$$

Die zeitliche Entwicklung des Zustandes ist gegeben durch

$$\mid \psi(t)\rangle = a(t) \mid +\rangle + b(t) \mid -\rangle$$

Berechnen Sie die Zeitabhängigkeit: a(t), b(t)

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Elektron nach der Zeit t im Zustand $\mid +\rangle$ zu finden ? Wann befindet sich das Elektron in dem Eigenzustand mit Eigenwert $-\frac{\hbar}{2}$ bzgl. des Operator S_y (Spinflip) ?

4 Spinmessung

Ein Elektron befinde sich in dem Spinzustand

$$\chi = A \begin{pmatrix} 1-2i \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Konstante A, sodass χ normiert ist

(b) Messen Sie S_z bei diesem Elektron. Welche Werte würden Sie erhalten ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Werte ? Was ist der Erwartungswert von S_z ?

(c) Messen Sie S_x bei diesem Elektron. Welche Werte würden Sie erhalten ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Werte ? Was ist der Erwartungswert von S_x ?

(d) Messen Sie S_y bei diesem Elektron. Welche Werte würden Sie erhalten ? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für jeden dieser Werte ? Was ist der Erwartungswert von S_y ?

5 Kopplung von Drehimpulsen

(a) Wenden Sie S_- auf den Zustand $| s = 1, m = 0\rangle$ von zwei gekoppelten Spins an und zeigen Sie, dass $\sqrt{2}\hbar \mid 1, -1\rangle$ folgt.

(b) Wenden Sie $S_\pm$ auf den singlett Zustand $| 0, 0\rangle$ an und zeigen Sie, dass es keine weiteren Singlett Zustände $s = 0$ gibt.

(c) Zeigen Sie, dass $| 11\rangle$ und $| 1 - 1\rangle$ Eigenzustände von S^2 mit den erwarteten Eigenzuständen sind.