Michael Schrapp Übung

Ferienkurs *Theoretische Quantenmechanik 2010*

Eindimensionale Probleme

1 1-dimensionales δ-Potential

Gegeben sei das eindimensionale δ-förmige Potential:

$$V(x) = -\lambda\delta(x) \quad (\lambda > 0). \tag{1}$$

1. Welchen Anschlussbedingungen muss die Wellenfunktion $\psi(x)$ und deren Ableitung bei $x = 0$ genügen?

   (Hinweis: Zeige, dass $\frac{d\psi}{dx}$ bei $x = 0$ unstetig ist, durch Integration der Schrödingergleichung über das infinitesimale Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$.)

2. Es existiert genau ein gebundener Zustand in diesem Potential. Bestimme seinen Energie-Eigenwert und die normierte Wellenfunktion.

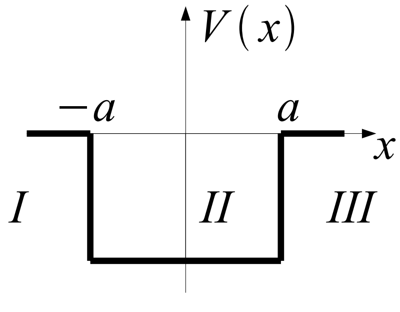
3. Betrachte die Streuzustände (d.h. $E > 0$) in diesem Potential. Unter dem Ansatz:

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + R(E)\, e^{-ikx} & \text{für } x < 0 \\ T(E)\, e^{ikx} & \text{für } x > 0 \end{cases}, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \tag{2}$$

   berechne die Reflexionsamplitude $R(E)$, den Reflexionskoeffizienten $r(E) = |R(e)|^2$, die Transmissionsamplitude $T(E)$ und den Transmissionskoeffizienten $t(E) = |T(E)|^2$.

2 Kastenpotential

Man leite die Eigenwertbedingungen für die Energieeigenwerte der gebunden Zustände eines Teilchens der Masse m im eindimensionalen Kastenpotential

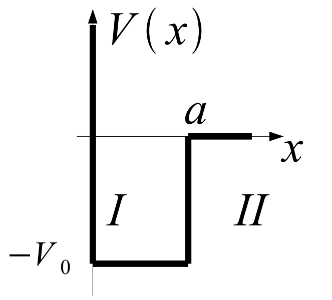


$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{für } |x| > a \end{cases} \tag{3}$$

her. Zeige in einer Skizze, wie die Energieeigenwerte graphisch bestimmt werden können.

3 Potentiallandschaft

Gegeben sei die nebenstehende Potentiallandschaft. Für das Potential solle gelten $V_0 = \frac{\hbar^2}{ma^2}$. Besitzt das System gebundene Zustände? Falls ja, gebe man die Eigenwerte an.



4 Wellenfunktion

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich unter dem Einfluß des endlich tiefen Kastenpotentials

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| < b \\ 0 & \text{für } |x| < b \end{cases} \tag{4}$$

wobei $V_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{16mb^2}$ gilt. Gegeben ist zudem die folgende Wellenfunktion:

$$\psi(x) = A \begin{cases} \cos(k_1 x) & \text{für } |x| < b \\ \cos(k_1 b)e^{-\kappa_2(|x|-b)} & \text{für } |x| < b \end{cases} \tag{5}$$

Dabei ist

$$A = \sqrt{\frac{\pi}{(\pi+4)b}},\ k_1 = \kappa_2 = \frac{\pi}{4b}$$

1. Erfüllt die Wellenfunktion alle Stetigkeitsedingungen für eine Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung? Was muss für die Normierung gelten? (Integral muss nicht berechnet werden)
2. Zeigen Sie, dass die oben angegebene Wellenfunktion ein Energieeigenwert ist und berechnen Sie den Energieeigenwert.
3. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich das Teilchen außerhalb des Potentialtopfes aufhält?

5 Auf- und Absteigeoperatoren

Betrachte einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator mit den Eigenzuständen n, wobei $\hat{\mathcal{H}}|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)|n\rangle$, sowie die Auf- und Absteigeoperatoren aus der Vorlesung mit ihrer Kommutatorrelation $\left[\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right] = 1$. Weiterhin ist der Teilchenzahloperator bekannt: $\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = n|n\rangle$. Bestimme die Normierungskonstante α in $|\psi\rangle = \hat{a}|n\rangle = \alpha|n-1\rangle$ und β in $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \beta|n+1\rangle$

6 harmonischer Oszillator

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

mit den Eigenzuständen $|n\rangle$.
Zur Zeit $t = 0$ sei der Zustand durch

$$|\psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\rangle$$

gegeben.

1. Man gebe die Zeitentwicklung $|\psi(t)\rangle$ an.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird jeweils die Energie E_0, E_1 oder E_2 gemessen?
3. Berechnen Sie den Erwartungswert von x und p.
   Hinweis: Überlegen Sie, welche Darstellung des Oszillators am besten geeignet ist, und welche Sätze für Erwartungswerte existieren.