Ferienkurs *Theoretische Mechanik* Sommer 2010

Lösungsvorschlag für die Probeklausur

1 Fragen

1. Kann man die Bewegungsgleichung des gedämpften Oszillators

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

   mit Auslenkung $x(t)$, Dämpfungskonstanten λ und Frequenz ω_0 als Lagragegleichung zweiter Art aus $L = T - V$ ableiten? Begründen Sie kurz.

2. In einem Auto, das mit konstanter Geschwindigkeit fährt, hängt ein Heliumballon unter der Decke. Wie verhält sich der Heliumballon bei einer plötzlichen Bremsung?

3. Ein hohler Würfel steht fest auf einer horizontalen Tischplatte. In dem Würfel bewegt sich ein Massenpunkt, der an den Wänden elastisch reflektiert wird. Nennen Sie drei unabhängige Erhaltungsgrößen.

4. Was ist eine zyklische Koordinate?

5. Wie schafft es eine Schlittschuhläuferin in einer Pirouette, sich immer schneller zu drehen?

Lösung:

1. Nein, denn der Dämpfungsterm $2\lambda\dot{x}$ lässt sich nicht aus einem Potenzial ableiten (Reibung ist per Definition nicht konservativ, sondern dissipativ).

2. Im Bezugsystem des Autos: Unter dem Einfluss der nach vorne gerichteten Trägheitskraft verdrängt die schwerere Luft den leichteren Heliumballon, der dadurch nach hinten beschleunigt wird.

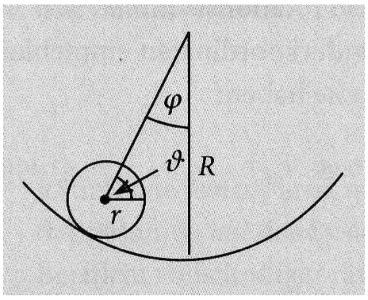
3. In den beiden horizontalen Richungen (etwa x, y), $|px|$ oder p_x^2 und $|py|$ oder p_y^2; Energie der vertikalen Bewegung (z-Richtung) $p_z^2/(2M) + Mgz$ oder Gesamtenergie.

4. Eine Koordinate heißt zyklisch, falls die Lagrange-Funktion nicht von dieser Koordinate abhängt. Jede zyklische Koordinate führt auf eine Erhaltungsgröße.

5. Durch Einziehen ihrer Arme verringert Sie ihr Trägheitsmoment Θ, so dass wegen Erhaltung des Drehimpulses $L = \Theta\omega$ die Winkelgeschwindigkeit ω zunehmen muss.

2 Zylinder auf Zylindermantel

Auf der Innenfläche eines Zylindermantels (Radius R) rolle ein Zylinder (Radius r, Massendichte ρ=const).



1. Wie lautet die Lagrangefunktion des Systems?
2. Formulieren Sie die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen.
3. Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Ausschläge φ

LÖSUNG:

1. Die kinetische Energie setzt sich zusammen aus der Translationsenergie und der Rotationsenergie:

   $T = T_{trans} + T_{rot} = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}J(\dot{\varphi}+\dot{\vartheta})^2 \qquad \text{mit } J = \frac{1}{2}mr^2$

   Die Potentielle Energie lautet:

   $V = mg(R-r)(1-\cos(\varphi))$

   Nützlich ist noch die Beziehung: $Rd\varphi = -rd\vartheta \rightarrow \dot{\vartheta} = -\frac{R}{r}\dot{\varphi}$

   $L = T - V$

   $L = \frac{1}{2}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}mr^2(\dot{\varphi}+\dot{\vartheta})^2 - mg(R-r)(1-\cos(\varphi))$

   $= \frac{1}{2}(m(R-r)^2 + \frac{1}{2}r^2(1-\frac{R}{r}))\dot{\varphi}^2 - mg(R-r)(1-\cos(\varphi))$

   $= \frac{3}{4}m(R-r)^2\dot{\varphi}^2 + mg(R-r)\cos(\varphi) - mg(R-r)$

2. $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mg(R-r)\sin(\varphi)$

   $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}m(R-r)\ddot{\varphi}$

   so erhalten wir die Bewegungsgleichung: $\ddot{\varphi} = -\frac{3}{2}\frac{g}{R-r}\sin(\varphi)$

3. Für kleine Ausschläge kann man nähern:

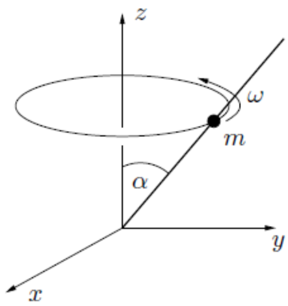
   $\ddot{\varphi} = -\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}\varphi$

Mit $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{R-r}}$ lautet die allgemeine Lösung:

$\varphi(t) = a\ \cos(\omega t) + b\ \sin(\omega t)$

3 Perle

Betrachten Sie einen geraden (masselosen, unendlichen) Draht, der mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse rotiert und mit dieser einen konstanten Winkel α bildet. Auf dem Draht gleitet reibungsfrei eine Perle mit Masse m, auf die die Gewichtskraft in negativer z-Richtung wirkt.



1. Geben Sie die Zwangsbedingungen an.
2. Stellen Sie eine Lagrange-Funktion für die Perle auf und geben Sie die entsprechende Lagrange-Gleichung zweiter Art an. Lösen Sie diese für $r(t) \geq 0$ mit den Anfangsbedingungen $r(0) = r_0$ und $\dot{r_0}(0) = v_0$.
3. Bestimmen Sie eine Hamilton-Funktion der Perle. Ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie E? Ist die Hamilton-Funktion erhalten?

LÖSUNG:

Zur Lösung dieser Aufgabe bieten sich zwei Koordinatensysteme an: Zylinderkoordinaten (r, φ, z) und Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ). Wir geben die Lösungen jeweils in beiden Koordinatensystemen an.

1. Kugelkoordinaten: $f_1(t, \varphi) = \varphi - \omega t = 0\ \ f_2(\vartheta) = \vartheta - \alpha = 0$

   Zylinderkoordinaten: $f_1(t, \varphi) = \varphi - \omega t = 0\ \ f_2(r, z) = r - z\tan(\alpha)$

2. Kugelkoordinaten:
   $L = \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin(\alpha)^2] - mgr\cos(\alpha)$

   $= \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\omega^2\sin(\alpha)^2] - mgr\cos(\alpha)$

   $= \frac{1}{2}m[\dot{r}^2 + r^2\widetilde{\omega}^2] - m\widetilde{g}r$

   Hier haben wir in der zweiten Zeile die Zwangsbedingungen aus a) benutzt und in der dritten Zeile eine effektive Frequenz $\widetilde{\omega} = \omega\sin(\alpha)$ und eine effektive Gravitationsbeschleunigung $\widetilde{g} = g\cos(\alpha)$ eingeführt.

   Mit

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\ddot r$ und $\frac{\partial L}{\partial r} = m\widetilde{\omega}^2 r - m\widetilde{g}$

erhalten wir die Bewegungsgleichung:

$m\ddot r - m\widetilde{\omega}^2 r + m\widetilde{g} = 0$

Die Lösung dieser Gleichung lautet wie folgt:

$r(t) = c_1 e^{\widetilde{\omega}t} + c_2 e^{-\widetilde{\omega}t} + \frac{\widetilde{g}}{\widetilde{\omega}^2}$

Mit den Anfangsbedingungen r_0 und v_0 kann man c_1 und c_2 bestimmen. Aus $r(0)$ und $\dot r(0)$ erhält man zunächst

$c_1 + c_2 = r_0 - \frac{\widetilde{g}}{\widetilde{\omega}^2}$

$c_1 - c_2 = \frac{\dot r_0}{\widetilde{\omega}}$

Damit ergibt sich:

$c_1 = \frac{1}{2}(r_0 - \frac{\widetilde{g}}{\widetilde{\omega}^2} + \frac{\dot r_0}{\widetilde{\omega}})$ $c_2 = \frac{1}{2}(r_0 - \frac{\widetilde{g}}{\widetilde{\omega}^2} - \frac{\dot r_0}{\widetilde{\omega}})$

Zylinderkoordinaten:

in Zylinderkoordinaten lautet die Lagrangefunktion wie folgt:
$L = \frac{1}{2}m[\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot z^2] - mgz$

$= \frac{1}{2}m[\dot r^2 + r^2\omega^2 + \frac{\dot r^2}{\tan(\alpha)^2}] - \frac{mgr}{\tan(\alpha)}$

$= \frac{1}{\sin(\alpha)^2}[\frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2)\widetilde{\omega}^2 - m\widetilde{g}r\sin(\alpha)]$

Hier haben wir in der zweiten Zeile die Zwangsbedingungen aus a) benutzt und in der dritten Zeile eine effektive Frequenz $\widetilde{\omega} = \omega\sin(\alpha)$ und eine effektive Gravitationsbeschleunigung $\widetilde{g} = g\cos(\alpha)$ eingeführt.

$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r} = m\ddot r$ und $\frac{\partial L}{\partial r} = m\widetilde{\omega}^2 r - m\widetilde{g}\sin(\alpha)$

$m\ddot r - m\widetilde{\omega}^2 r + m\widetilde{g}\sin(\alpha) = 0$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet:

$r(t) = c_1 e^{\widetilde{\omega}t} + c_2 e^{-\widetilde{\omega}t} + \sin(\alpha)\frac{\widetilde{g}}{\widetilde{\omega}^2}$

Mit den Anfangsbedingungen r_0 und v_0 kann man c_1 und c_2 bestimmen. Aus $r(0)$ und $\dot r(0)$ erhält man zunächst

$c_1 + c_2 = r_0 - \frac{\sin(\alpha)\widetilde{g}}{\widetilde{\omega}^2}$

$c_1 - c_2 = \frac{\dot r_0}{\widetilde{\omega}}$

Damit ergibt sich:

$c_1 = \frac{1}{2}(r_0 - \frac{\sin(\alpha)\widetilde{g}}{\widetilde{\omega}^2} + \frac{\dot r_0}{\widetilde{\omega}})$ $c_2 = \frac{1}{2}(r_0 - \frac{\sin(\alpha)\widetilde{g}}{\widetilde{\omega}^2} - \frac{\dot r_0}{\widetilde{\omega}})$

Hier sei noch einmal angemerkt, dass in Kugelkoordinaten r(t) den Abstand vom Ursprung angibt, während r(t) in Kugelkoordinaten den Abstand von der Z-Achse angibt. $r_{Zylinder} = sin(\theta) r_{Kugel}$ in unserem Fall ist $\theta = \alpha$.

3. Kugelkoordinaten: Der zu r kunjugierte Impuls lautet:

   $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Leftrightarrow \dot{r} = \frac{p}{m}$

   Damit können wir nun die Hamlitonfunktion bestimmen:

   $H(r,p) = \dot{r}p - L$

   $= \frac{p^2}{2m} - [\frac{1}{2}m(\frac{p^2}{m^2} + r^2\widetilde{\omega}^2 - m\widetilde{g}r)]$

   $= \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}mr^2\widetilde{\omega}^2 + m\widetilde{g}r$

   Vergleichen wir das mit der Energie so sehen wir folgendes:
   $E = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mr^2\widetilde{\omega}^2 + m\widetilde{g}r \neq H(r,p)$

   Zylinderkoordinaten: Der zu r konjugierte Impuls lautet:

   $p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m\dot{r}}{\sin(\alpha)^2} \Leftrightarrow \dot{r} = \frac{\sin(\alpha)^2 p}{m}$

   Damit können wir nun die Hamlitonfunktion bestimmen:

   $H(r,p) = \dot{r}p - L$

   $= \frac{\sin(\alpha)^2 p^2}{2m} - [\frac{1}{2}m(\frac{\sin(\alpha)^2 p^2}{m^2} + r^2\omega^2] + \frac{mgr}{\tan(\alpha)}$

   $= \frac{\sin(\alpha)^2 p^2}{2m} - \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{mgr}{\tan(\alpha)}$

   Vergleichen wir das mit der Energie so sehen wir folgendes:
   $E = T + V = \frac{\sin(\alpha)^2 p^2}{2m} + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 + \frac{mgr}{\tan(\alpha)} \neq H(r,p)$

   Das die Hamiltonfunktion nicht gleich der Energie ist, liegt daran, dass der Draht reale Arbeit an der Perle verrichtet. D.h. die Zwangsbedingungen verändern die Energie des Systems.

   Die Hamiltonfunktion ist in beide Fällen Erhalten, da sie nicht explizit zeitabhängig ist.

   $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = 0$

4 Kugelschale

Betrachten Sie eine homogene Kugelschale mit Massendichte ρ, innerem Radius r und äußerem Radius R. Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente der Kugelschale bezüglich eines körperfesten Bezugssystems mit Ursprung im Mittelpunkt der Kugelschale.

Lösung:

Aufgrund der Symmetrie des Körpers verwenden wir natürlich Kugelkoordinaten. Wegen der Kugelsymmetrie sind alle drei Hauptträgheitsmomente identisch $I_{11} = I_{22} = I_{33}$, so dass wir nur eins berechnen müssen. Das Volumen der Kugelschale kann man sich leicht überlegen, wenn man sich daran erinnert, dass das Volumen einer Vollkugel mit Radius R gegeben ist durch $\frac{4\pi}{3}R^3$ Dann folgt sofort, dass das Volumen unserer Kugelschale gegeben ist durch:

$V = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)$

$x_1 = x = r\sin(\vartheta)\cos(\varphi)$

$x_2 = y = r\sin(\vartheta)\sin(\varphi)$

$x_3 = z = r\cos(\vartheta)$

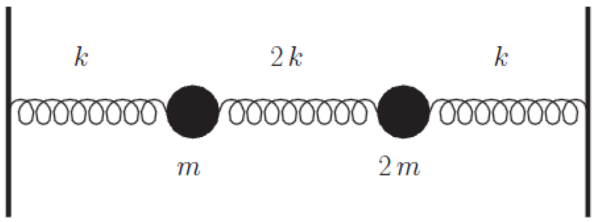
$$\begin{aligned}
I_{11} &= \rho\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} drd\vartheta d\varphi\, r^2\sin(\vartheta)(r^2 - r^2\sin^2(\vartheta)\cos^2(\vartheta)) \\
&= \rho\int_{R_1}^{R_2} r^4 dr \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\sin(\vartheta) - \sin(\vartheta)^3\cos(\varphi)^2)d\vartheta d\varphi \\
&= \rho\frac{1}{5}(R_2^5 - R_1^5)\cdot(2\cdot 2\pi - \frac{4}{3}\cdot\pi) = \frac{8\pi\rho}{15}(R_2^5 - R_1^5)
\end{aligned}$$

Wenn man jetzt noch die Dichte des Körpers durch seine Masse ausdrückt erhält man

$\rho = \frac{M}{V} \ \rightarrow\ I_{11} = I_{22} = I_{33} = \frac{2M}{5}\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$

5 Gekoppelte Massen

Betrachten Sie zwei Massenpunkte mit Massen m und 2m, die jeweils mit einer Feder der Federkonstanten k an einer Wand befestigt sind und mit einer Feder der Federkonstanten 2k miteinander verbunden sind.



1. Stellen Sie eine Lagrange-Funktion für die Bewegung der Massenpunkte auf.
2. Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen der Schwingungen des Systems sowie die zugehörigen Eigenvektoren.

LÖSUNG:

1. Bezeichne x_1 die Auslenkung aus der Ruhelage des Massenpunkts mit Masse m und x_2 die Auslenkung aus der Ruhelage des Massenpunkts mit Masse 2m. Dann ist die Lagrange-Funktion gegeben durch:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_1^2 - k(x_2 - x_1)^2 \\ &= \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^T \hat{T} \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2}\vec{x}^T \hat{V} \vec{x} \end{aligned}$$

Mit $\hat{T} = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $\hat{V} = k \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

2. Die Eigenfrequenzen sind die Lösungen der Gleichung $det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) = 0$

$$\begin{aligned} \det(\hat{V} - \omega^2 \hat{T}) &= \begin{vmatrix} 3k - 2m\omega^2 & -2k \\ -2k & 3k - m\omega^2 \end{vmatrix} \\ &= (3k - 2m\omega^2)(3k - m\omega^2) - 4k^2 \\ &= 5k^2 - 9mk\omega^2 + 2m^2\omega^4 \\ &= \left(\omega^2 - \frac{9}{4}\frac{k}{m}\right)^2 - \frac{41}{16}\frac{k^2}{m^2} \end{aligned}$$

D.h die Lösungen lauten: $\omega_\pm = \frac{9 \pm \sqrt{41}}{4} \frac{k}{m}$

Die entsprechenden Eigenvektoren erhält man aus der Gleichung $(\hat{V} - \omega_\pm^2 \hat{T})\vec{u} = 0$

$\hat{V} - \omega_+^2 \hat{T} = \frac{k}{4} \begin{pmatrix} -2(3 + \sqrt{41}) & -8 \\ -8 & 3 - \sqrt{41} \end{pmatrix}$ woraus sich folgendes Gleichungssystem ergibt:

$2(3+\sqrt{41})u_1 - 8u_2 = 0$
$-8u_1 + (3-\sqrt{41})u_2 = 0$

Dies führt zu:
$u_2 = -\frac{3+\sqrt{41}}{4}u_1 \;\rightarrow \vec{u}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3+\sqrt{41}}{4} \end{pmatrix} u_1$
Analog findet man für ω_-:
$u_2 = -\frac{3-\sqrt{41}}{4}u_1 \;\rightarrow \vec{u}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3-\sqrt{41}}{4} \end{pmatrix} u_1$