Ferienkurs *Theoretische Mechanik* – Sommer 2010

(Starrer Körper)

1 Diagonalisieren des Trägheitstensors

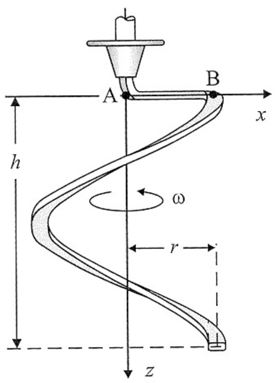
Gegeben sei folgender nicht-diagonaler Trägheitstensor eines Körpers mit konstanter Massendichte und der Gesamtmasse M:

$$\mathbf{I} = \frac{M}{12}\begin{pmatrix} \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 & 0 & \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}a^2 & 0 & \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}c^2 \end{pmatrix}$$

Bringen Sie den Tensor auf Diagonalform und bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente und -achsen. Bestimmen Sie eine Transformationsmatrix und daraus eine mögliche ausgeführte Operation auf das Koordinatensystem.

2 Eine Knetmaschine

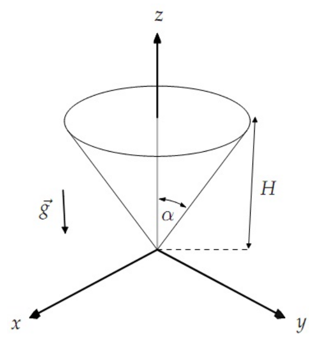
Eine zylindrische Spirale mit n Windungen, Masse m, Höhe h und Radius r dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die z-Achse.



1. Berechnen Sie den Trägheitstensor der Knetspirale.
   Hinweis: Vernachlässigen Sie den Beitrag der Spiralenhalterung von A nach B
2. Welches Drehmoment muss das Lager im Punkt A aufnehmen?

3 Kegel im Schwerefeld

Es wird ein Kegel der Höhe H mit Öffnungswinkel 2α und konstanter Massendichte ρ betrachtet.



1. Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Kegels
2. Berechnen Sie den Trägheitstensor $I^*_{kl} = I^*_k \delta_{kl}$ im Hauptachsensystem mit Ursprung in der Spitze des Kegels (siehe Abb.). Drücken Sie das Ergebnis durch die Gesamtmasse M aus
3. Berechnen Sie den Trägheitstensor $I^{CM}_{kl} = I^{CM}_k \delta_{kl}$ im Hauptachsensystem mit Ursprung im Schwerpunkt des Kegels
4. Stellen Sie die Lagrange-Funktion für einen Kegel im homogenen Schwerefeld $\vec{g}$ der Erde auf, dessen Spitze an einem raumfesten Punkt aufgehängt ist, d.h. sich nicht bewegen kann. Zeigen Sie, dass sich die kinetische Energie in der Form $T = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{3} I^*_k \omega_k^2$ schreiben lässt. Hierbei stellt ω_i die Rotation um die kartesische $\hat{e}_i$-Achse dar.

Im weiteren Verlauf sind folgende Definitionen für die ω_i zu verwenden:

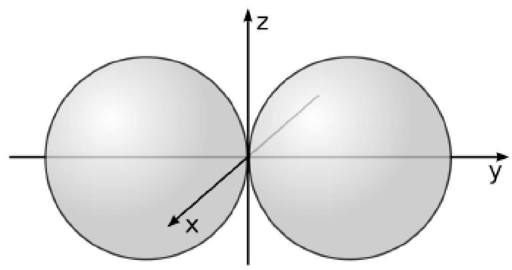
$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi \\
\omega_2 &= -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi \\
\omega_3 &= \dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta
\end{aligned}$$

Die Winkel ψ, ϕ, θ sind hierbei die Euler-Winkel, deren genaue Bedeutung im Folgenden jedoch nicht maßgeblich ist.

5. Betrachten Sie den Fall, dass $\psi = \phi = 0$ ist und der Kegel sich somit nur in einer Ebene senkrecht zur xy-Ebene bewegt.
   Stellen Sie die Bewegungsgleichung für $\theta(t)$ auf und finden Sie die Gleichgewichtslagen. Diskutieren Sie die Stabilität der Gleichgewichtslagen.
   Lösen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die stabile Gleichgewichtslage.

4 Das Trägheitsmoment zweier Kugeln

Berechnen Sie den Trägheitstensor von zwei identischen homogenen Vollkugeln, die am Ursprung zusammengeklebt sind und jeweils den Radius R sowie die Masse M haben. Drücken Sie den Trägheitstensor durch die Masse M aus.



5 Bestimmung von Trägheitstensoren

Berechnen Sie die Komponenten I_{kl} des Trägheitstensors bezüglich des Schwerpunkts für folgende Körper:

1. Eine Kugel mit Radius R mit einer in radialer Richtung quadratisch anwachsender Massendichte $\rho(\vec{r}) = \mu r^2$
2. Einen Zylinder mit Länge L und Radius R mit homogener Massendichte ρ

Drücken Sie die Komponenten des Trägheitstensors durch die Gesamtmasse M aus.