Christoph Schnarr & Michael Schrapp

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* Sommer 2010

Hamiltonformalismus und Schwingungssysteme

Teil I

Hamiltonformalismus

1 Aus *Doctoral General Examination (2002)* des MIT

Ein Teilchen der Masse m ist durch einen Faden mit variabler Länge $l(t)$ mit dem Ursprung verbunden. Ferner ist das Teilchen in einer Ebene gebunden. Die Länge $l(t)$ des Fadens ist beliebig, aber stets gilt, dass $|l/\dot{l}|$ viel größer als die Schwingungsdauer des Pendels ist und $\dot{l} \geq 0$. Die Ebene enthält den Aufhängepunkt des Fadens und ihre Normale stehe senkrecht zu einem homogenen Gravitationsfeld.

i.) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t)$ und die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(\theta, p, t)$ dieses dynamischen Systems.

ii.) Ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie des Systems? Ist die Hamilton-Funktion erhalten? Falls die Hamilton-Funktion nicht gleich der Gesamtenergie ist, ist die Gesamtenergie erhalten?

iii.) Geben Sie eine Bewegungsgleichung für den Winkel θ an. Wie groß ist die Periodendauer der Schwingung, wenn $\dot{l} = 0$ gilt, in der Kleinwinkelnäherung?

Lösung:

i.) Wenn θ den Winkel bezeichnet, der die Auslenkung aus der Ruhelage des Systems beschreibt, so ist die potentielle Energie stets gegeben durch:

$$V = -mgl\cos\theta$$

Ferner kann die Berechnung der kinetischen Energie in ebenen Polarkoordinaten erfolgen:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{l}^2 + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

Die Lagrange-Funktion des Systems lautet daher:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{m}{2}\left(\dot{l}(t)^2 + l(t)^2\dot{\theta}^2\right) + mgl(t)\cos\theta$$

Der zu θ kanonisch konjugierte Impuls errechnet sich zu:

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = ml(t)^2\dot{\theta}$$

Über die Definition der Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$ folgt daher:

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \dot{\theta}p - \mathcal{L} = -\frac{m}{2}\dot{l}(t)^2 + \frac{p^2}{2ml(t)^2} - mgl(t)\cos\theta$$

ii.) Die Gesamtenergie des Systems $T + V$ ist

$$E = T + V = \frac{m}{2}\dot{l}(t)^2 + \frac{p^2}{2ml(t)^2} - mgl(t)\cos\theta = \mathcal{H} + m\dot{l}(t)^2 \neq \mathcal{H}$$

Offenbar ist die Hamilton-Funktion nicht gleich der Gesamtenergie des Systems. Die Hamilton-Funktion ist nicht erhalten, da

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = -m\dot{l}(t)\ddot{l}(t) - \frac{p^2}{ml(t)^3}\dot{l}(t) - mg\dot{l}(t)\cos\theta \neq 0$$

Die Gesamtenergie ist auch nicht erhalten, da

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{H}}{dt} + 2m\dot{l}(t)\ddot{l}(t) \neq 0$$

iii.) Die Bewegungsgleichung für θ ergibt sich beispielsweise aus den Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}ml(t)^2\dot{\theta} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = -mgl(t)\sin\theta$$

Daraus kann die Bewegungsgleichung gewonnen werden:

$$\ddot{\theta} + 2\frac{\dot{l}(t)}{l(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{l(t)}\sin\theta = 0$$

Setzt man nun $\dot{l} = 0$ und $\sin\theta \approx \theta$ an, so findet sich die Bewegungsgleichung eines harmonischen Oszillators:

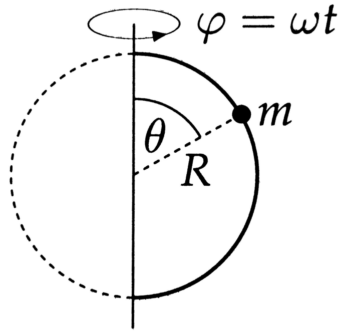
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

Offenbar beträgt die Schwingungsdauer:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

2 Rotierender Draht 2

Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmig rotierenden Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem ω um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.



i.) Stellen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ auf.

ii.) Berechnen Sie damit die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf.

iii.) Bestimmen Sie die Gesamtenergie E und berechne $\frac{dE}{dt}$. Was ist dafür die physikalische Begründung?

iv.) Berechnen Sie $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ und vergleichen Sie $\mathcal{H}$ mit der Energie.

LÖSUNG:

i.) Die Lagrange-Funktion für ein freies Teilchen in Kugelkoordinaten lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2 sin^2(\vartheta)\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Zwangsbedingungen einsetzen:

$$r = R, \qquad \varphi = \omega t$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\vartheta}^2 + R^2\sin^2(\vartheta)\,\omega^2\right)$$

ii.) Bei der Hamilton-Funktion beachte man, dass es nur einen Freiheitsgrad gibt. Zuerst den kanonischen Impuls ausrechnen:

$$p_\vartheta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\vartheta}} = mR^2\dot{\vartheta}$$

Jetzt nach der Geschwindigkeit auflösen:

$$\dot{\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mR^2}$$

dann die Hamilton-Funktion bestimmen und die Geschwindigkeit durch den kanonischen Impuls eliminieren:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= p_\vartheta\dot{\vartheta} - \mathcal{L}\\ &= \frac{p_\vartheta^2}{mR^2} - \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\vartheta}^2 + R^2 sin^2(\vartheta)\,\omega^2\right)\\ &= \frac{p_\vartheta^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2 sin^2(\vartheta)\,\omega^2\end{aligned}$$

Jetzt die kanonischen Gleichungen berechnen und zu einer einzigen Bewegungsgleichung zusammenführen:

$$\begin{aligned}\dot{p}_\vartheta &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\vartheta} = mR^2 sin(\vartheta)\,cos(\vartheta)\,\omega^2\\ \dot{\vartheta} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_\vartheta} = \frac{p_\vartheta}{mR^2}\\ &\Rightarrow \ddot{\vartheta} - sin(\vartheta)\,cos(\vartheta)\,\omega^2 = 0\end{aligned}$$

Das ist die DGL für ϑ.

iii.) Da $\mathcal{L} = T = E$, weil $V = 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} = \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= m\left(R^2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + R^2\dot{\vartheta}sin\left(\vartheta\right)cos\left(\vartheta\right)\omega^2\right) \\
&= mR^2\dot{\vartheta}\underbrace{\left(\ddot{\vartheta} + sin\left(\vartheta\right)cos\left(\vartheta\right)\omega^2\right)}_{\neq 0} \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Das folgt aus der Bewegungsgleichung für ϑ (Man beachte das Plus!). Die physikalische Begründung ist natürlich, dass die Zwangsbedingung zeitabhängig ist (der Draht dreht sich ständig) und somit dem System Energie zu- und abgeführt werden kann.

iv.) Die totale Zeitableitung der Hamilton-Funktion ist gleich ihrer partiellen:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} = 0 \\
\text{andererseits:} \quad &= \frac{p_\vartheta\dot{p}_\vartheta}{mR^2} - \dot{\vartheta}mR^2 sin\left(\vartheta\right)cos\left(\vartheta\right)\omega^2 \\
&= \frac{p_\vartheta\dot{p}_\vartheta}{mR^2} - \frac{p_\vartheta\dot{p}_\vartheta}{mR^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion ist also erhalten, die Energie aber nicht! Daraus folgt sofort:

$$\mathcal{H} \neq E$$

3 Harmonischer Oszillator

Geben Sie die Bewegungsgleichungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit den Poisson-Klammern an (Kanonische Gleichungen).

LÖSUNG:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= T + U \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\end{aligned}$$

Die kanonischen Gleichungen führen auf:

$$\begin{aligned}\dot{x} = \{x, \mathcal{H}\} &= \left\{x, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right\} \\ &= \frac{1}{2m}\left\{x, p^2\right\} + \frac{1}{2}k\underbrace{\left\{x, x^2\right\}}_{=0} \\ &= \frac{1}{2m}\left(\underbrace{\{x, p\}}_{=1}p + p\underbrace{\{x, p\}}_{=1}\right) \\ \Rightarrow \underline{\dot{x} =} & \underline{\frac{p}{m}}\end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}\dot{p} = \{p, \mathcal{H}\} &= \left\{p, \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2\right\} \\ &= \frac{1}{2m}\underbrace{\left\{p, p^2\right\}}_{=0} + \frac{1}{2}k\left\{p, x^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}k\left(\underbrace{\{p, x\}}_{=-1}x + x\underbrace{\{p, x\}}_{=-1}\right) \\ \Rightarrow \underline{\dot{p} =} & \underline{-kx}\end{aligned}$$

Die erste Bewegungsgleichung kann man einmal nach der Zeit differenzieren und in die zweite einsetzen. Damit folgt daraus die Bewegungsgleichung, die man auch für den harmonischen Oszillator erwarten würde.

$$\ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m} \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -kx$$

Teil II

Schwingungssysteme

4 Gedämpfte Schwingungen mit Anregung

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q bewege sich unter dem Einfluss Stokesscher Reibung in einem homogenen, harmonisch mit der Frequenz ω oszillierenden elektrischen Feld.

i.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Massepunkt auf.

ii.) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Bedingung, dass das Teilchen am Anfang ruht und sich im Ursprung eines Bezugssystems befindet.

iii.) Diskutieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Unter Stokesscher Reibung versteht man eine Kraft, die proportional zur Geschwindigkeit des Körpers ist und der Bewegungsrichtung entgegenwirkt.

Die Kraft eines elektrischen Feldes $\vec{E}$ auf ein geladenenes Teilchen der Ladung q ist gegeben durch $q\vec{E}$.

LÖSUNG:

i.) Das elektrische Feld kann dargestellt werden durch die Gleichung

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t)$$

Die Stokessche Kraft wird dargestellt durch:

$$\vec{F}_{Stokes} = -\beta \dot{\vec{r}}$$

Hierbei gilt $\beta > 0$ nach dem Hinweis.

Die Richtung des elektrischen Feldes wurde willkürlich in x-Richtung festgelegt.

Folglich erhält man für die Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\beta\dot{\vec{r}} + qE_0\vec{e}_x \cos(\omega t)$$

ii.) Da das Teilchen am Anfang ruhend im Ursprung befindet, folgt sofort aus der Bewegungsgleichung

$$y = 0$$
$$z = 0$$

Für die Bewegung in x-Richtung erhält man folgende Differentialgleichung:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = \frac{qE_0}{m}\cos(\omega t)$$

Jede Lösung dieser Differentialgleichung kann als Summe einer speziellen, partikulären Lösung obiger Gleichung und einer Lösung der Gleichung für $E_0 = 0$ dargestellt werden.

Zuerst soll die allgemeine Lösung der homogenen DGL bestimmt werden ($E_0 = 0$). Der Ansatz $x(t) = \exp(\lambda t)$ liefert hier die möglichen Werte für λ und damit die allgemeine Lösung:

$$\lambda_1 = 0, \ \ \lambda_2 = -\frac{\beta}{m}$$
$$x_{\text{hom}}(t) = A + B\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right), \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Zur Bestimmung einer partikulären Lösung der Differentialgleichung soll die Differentialgleichung umgeschrieben werden zu

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} = \frac{qE_0}{m}\Re[\exp(-i\omega t)]$$

Interpretiert man x als Realteil einer komplexen Funktion z, so kann man auch die Differentialgleichung in folgender Form schreiben:

$$\ddot{z} + \frac{\beta}{m}\dot{z} = \frac{qE_0}{m}\exp(-i\omega t)$$

Diese Gleichung kann mit dem Ansatz $z(t) = C\exp(-i\omega t)$ für einen bestimmten Wert von C erfüllt werden:

$$-\omega^2 C + i\omega\frac{\beta}{m}C = \frac{qE_0}{m}$$

Die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung lautet daher:

$$x(t) = A + B\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) + \Re\left[\frac{qE_0}{i\omega\beta - m\omega^2}\exp(-i\omega t)\right], \quad A, B \in \mathbb{R}$$

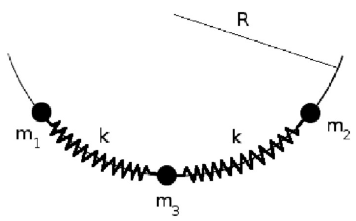
Berechnet man den Realteil explizit und setzt die Anfangsbedingungen ein, so folgt als Lösung der Bewegungsgleichung in x-Richtung:

$$\begin{aligned} x(t) &= A + B\exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) + \frac{qE_0}{m^2\omega^4 + \omega^2\beta^2}\left(-m\omega^2\cos(\omega t) - \omega\beta\sin(\omega t)\right) \\ &= \frac{qE_0 m}{m^2\omega^2 + \beta^2}\left(2 - \exp\left(-\frac{\beta}{m}t\right) - \cos(\omega t) - \frac{\beta}{m\omega}\sin(\omega t)\right) \end{aligned}$$

iii.) Je größer die Dämpfung durch die Stokessche Reibung ist, um so größer ist die Phasendifferenz zwischen dem antreibenden elektrischen Feld und der Auslenkung. Im Grenzfall $\beta \to \infty$ wird diese Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$. Dies kann dadurch erklärt werden, dass für immer größer werdende Reibung die Masse immer schlechter der Änderung des Feldes folgen kann. Zu dem geht auch die Amplitude, wie aus der Gleichung gesehen werden kann, für $\beta \to \infty$ gegen null, sodass im unendlich zähen Medium die Masse gar nicht mehr bewegt werden kann.

5 Drei Massen auf einem Zylindermantel

Drei Teilchen sind auf einem Zylindermantel mit dem Radius R gebunden. Die Zylinderachse ist senkrecht zu einem homogenen Gravitatationsfeld der Stärke $\vec{g}$ orientiert. Ferner können sich die Teilchen nur senkrecht zur Zylinderachse bewegen. Die Massen zweier Teilchen sind identisch und sind mit dem dritten über eine Feder mit der Federkonstanten k verbunden. Ferner ist es den Teilchen erlaubt sich zu durchdringen.



i.) Beschreiben Sie das Problem mit dem Lagrangeformalismus und finden Sie die Normalmoden und die entsprechenden Schwingungsfrequenzen des Systems. Betrachten Sie hierbei nur den Fall, dass sich die Massen nahe am unteren Punkt befinden. Skizzieren Sie die Normalmoden.

LÖSUNG:

i.) Im folgenden sollen die Achse eines kartesischen Koordinatensystems so orientiert werden, dass die Zylinderachse entlang der z-Achse und die Gravitation in negative y-Richtung zeigt.
Die Position eines Teilchens ist daher durch die Koordinaten

$$(x_i, y_i) = R(\sin\theta_i, -\cos\theta_i)$$

gegeben. Hierbei wurde angenommen, dass der Ursprung des Koordinatensystems auf der Zylinderachse liegt.
Der Winkel θ_i ist hierbei der Winkel zwischen der Gleichgewichtslage und dem Ortsvektor des i-ten Teilchens.

Zur Konstruktion einer Lagrangefunktion für dieses System soll zuerst die kinetische Energie der Teilchen bestimmt werden. Das mittlere Teilchen habe dazu die Masse M haben und die beiden äußeren die Masse m. Die kinetische Energie ergibt sich zu:

$$T = \frac{m}{2}\left(R^2\dot{\theta}_1^{\,2} + R^2\dot{\theta}_2^{\,2}\right) + \frac{M}{2}R^2\dot{\theta}_3^{\,2}$$

Teilchen 1 und 2 sind hierbei die äußeren Teilchen. Die potentielle Energie errechnet sich aus dem Abstand $R(\theta_i - \theta_j)$ zwischen den Teilchen. Da die äußeren Teilchen nur mit dem mittleren verbunden sind, folgt:

$$\begin{aligned} U &= \frac{kR^2}{2}\left((\theta_1-\theta_3)^2 + (\theta_2-\theta_3)^2\right) - mgR\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right) - MgR\cos\theta_3 \\ &\approx \frac{kR^2}{2}\left((\theta_1-\theta_3)^2 + (\theta_2-\theta_3)^2\right) + \frac{1}{2}mgR\left(\theta_1^2+\theta_2^2\right) + \frac{1}{2}MgR\theta_3^2 + const. \end{aligned}$$

Die Lagrangefunktion ist nun $\mathcal{L} = T - U$ und die Bewegungsgleichungen ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} mR^2\ddot{\theta}_1 &= -kR^2(\theta_1-\theta_3) - mgR\theta_1 \\ mR^2\ddot{\theta}_2 &= -kR^2(\theta_2-\theta_3) - mgR\theta_2 \\ MR^2\ddot{\theta}_3 &= -kR^2(2\theta_3-\theta_1-\theta_2) - MgR\theta_3 \end{aligned}$$

In Matrixform lauten diese Bewegungsgleichungen:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k - \frac{mg}{R} & 0 & k \\ 0 & -k - \frac{mg}{R} & k \\ k & k & -2k - \frac{Mg}{R} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz $\theta_i = A_i \exp(-i\omega t)$ führt zu folgendem Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} k + \frac{mg}{R} - m\omega^2 & 0 & -k \\ 0 & k + \frac{mg}{R} - m\omega^2 & -k \\ -k & -k & 2k + \frac{Mg}{R} - M\omega^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = 0$$

Offenbar sind nur dann triviale Lösungen möglich, wenn die Matrix singulär wird. Dies ist beispielsweise dann erfüllt, wenn ihre Determinante verschwindet. Nach einer entsprechenden Rechnung folgt, dass

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{g}{R} + \frac{k}{m} \\ \omega_{2,3}^2 &= \frac{g}{R} + \frac{k}{2m} + \frac{k}{M} \pm k\sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}} \end{aligned}$$

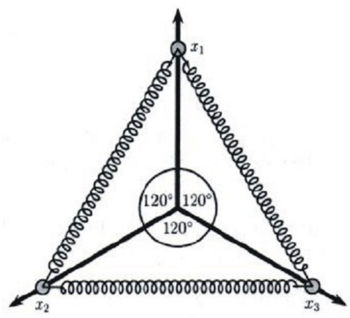
Die entsprechenden Eigenvektoren ergeben sich zu:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{m}{M} - m\sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} - \frac{m}{M} + m\sqrt{\frac{1}{4m^2} + \frac{1}{mM} + \frac{1}{M^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Normalmoden ergeben sich für ω_1 als Schwingung, bei der die äußeren Massen gegenphasig schwingen und die mittlere ruht, sowie ω_2 als Schwingung, bei der eine beide äußere Massen in Phase schwingen und die mittlere gegenphasig, und für ω_3 als gleichphasige Schwingung aller Teilchen.

6 Gekoppelte Perlen

Drei punktförmige Perlen der Masse m bewegen sich reibungsfrei entlang drei idealisierter Drähte. Die Drähte liegen in einer Ebene und gehen vom Koordinatenursprung aus, wobei sie Winkel von $\frac{2}{3}\pi$ einschließen. Weiter sind die Perlen mit linearen Federn mit der Federkonstante k verbunden. Die natürliche Lage der Federn sei $\sqrt{3}l$, sodass sich die Ruhelage der Perlen jeweils im Abstand l vom Ursprung befindet. Diese Gleichgewichtslage wird nun gestört und die Körper oszillieren um die Auslenkungen aus den Ruhelagen x_1, x_2 und x_3. Betrachten Sie kleine Auslenkungen x_1, x_2, $x_3 \ll l$, sodass in erster Näherung die Winkel zwischen den Drähten und den Federn als konstant betrachtet werden können.



i.) Geben Sie die Lagrange-Funktion des System an.

ii.) Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen ab. Zeigen Sie, dass sie in der Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{3k}{4m} M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden können und geben Sie die Matrix M an.

iii.) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen, indem Sie das Eigenwertproblem $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ behandeln.

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_i.

Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$.

LÖSUNG:

i.) Das Vorzeichen der x_i soll so gewählt werden, dass positive Auslenkungen in die eingezeichnete Richtung zeigen sollen. Die kinetische Energie berechnet sich hiernach zu:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right)$$

Zur Berechnung der potentiellen Energie ist die Länge einer Feder wichtig. Die Länge der Feder zwischen Masse 1 und 2 ist:

$$\begin{aligned}
y_{12} &= \sqrt{\left(l + x_1 + \frac{1}{2}(l + x_2)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(l + x_2)\right)^2} \\
&= \sqrt{(l + x_1)^2 + (l + x_2)^2 + (l + x_1)(l + x_2)} \\
&= \sqrt{l^2 + 2lx_1 + x_1^2 + l^2 + 2lx_2 + x_2^2 + l^2 + lx_1 + lx_2 + x_1x_2} \\
&\approx \sqrt{l^2 + 2lx_1 + \cancel{x_1^2} + l^2 + 2lx_2 + \cancel{x_2^2} + l^2 + lx_1 + lx_2 + \cancel{x_1x_2}} \\
&= \sqrt{3\,l^2 + 3\,lx_1 + 3\,lx_2} \\
&= \sqrt{3}l\sqrt{1 + \frac{x_1}{l} + \frac{x_2}{l}} \\
&\approx \sqrt{3}l\left(1 + \frac{x_1}{2l} + \frac{x_2}{2l}\right) \\
&\approx l\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1 + x_2)
\end{aligned}$$

Die Längen der anderen Federn berechnet man analog. Folglich ergibt sich die potentielle Energie zu:

$$V = \frac{3k}{8}\left((x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2\right)$$

Damit lautet die Lagrange-Funktion dieses Systems:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2\right) - \frac{3k}{8}\left((x_1 + x_2)^2 + (x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_1)^2\right)$$

ii.) Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt aus obiger Lagrange-Funktion das System von Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}
m\ddot{x}_1 &= -\frac{3k}{4}(2x_1 + x_2 + x_3) \\
m\ddot{x}_2 &= -\frac{3k}{4}(x_1 + 2x_2 + x_3) \\
m\ddot{x}_3 &= -\frac{3k}{4}(x_1 + x_2 + 2x_3)
\end{aligned}$$

Dieses System kann offenbar in die gewünschte Form mit der Matrix M gebracht werden:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iii.) Die Eigenwerte der Matrix M können aus der Lösung der Gleichung

$$\det(M - \lambda \cdot \mathbb{1}) = 0$$

bestimmt werden. Diese Gleichung kann dargestellt werden als:

$$(4 - \lambda)(1 - \lambda)^2 = 0$$

Daraus folgt:

$$\lambda_1 = 4, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 1, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Ansatz $x_i = A_i \exp(i\omega t)$ führt auf das Eigenwertproblem:

$$\left(\omega^2 - \frac{3k}{4m}M\right)\vec{A} = 0$$

Offenbar ergibt sich für die möglichen Normalmoden:

$\omega^2 = \frac{3k}{m}$, $\quad \vec{A}^T = (1, 1, 1)$ $\quad \rightarrow$ Alle drei Massen schwingen gleichphasig.

$\omega^2 = \frac{3k}{4m}$, $\quad \vec{A}^T = (1, -1, 0)$ $\quad \rightarrow$ Zwei Massen schwingen gegenphasig, die dritte Masse ruht.

$\omega^2 = \frac{3k}{4m}$, $\quad \vec{A}^T = (0, -1, 1)$ $\quad \rightarrow$ Zwei Massen schwingen gegenphasig, die dritte Masse ruht.