Christoph Schnarr & Michael Schrapp Übungsblatt 3

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* Sommer 2010

Hamiltonformalismus und Schwingungssysteme

Teil I

Hamiltonformalismus

1 Aus *Doctoral General Examination (2002)* des MIT

Ein Teilchen der Masse m ist durch einen Faden mit variabler Länge $l(t)$ mit dem Ursprung verbunden. Ferner ist das Teilchen in einer Ebene gebunden. Die Länge $l(t)$ des Fadens ist beliebig, aber stets gilt, dass $|l/\dot{l}|$ viel größer als die Schwingungsdauer des Pendels ist und $\dot{l} \geq 0$. Die Ebene enthält den Aufhängepunkt des Fadens und ihre Normale stehe senkrecht zu einem homogenen Gravitationsfeld.

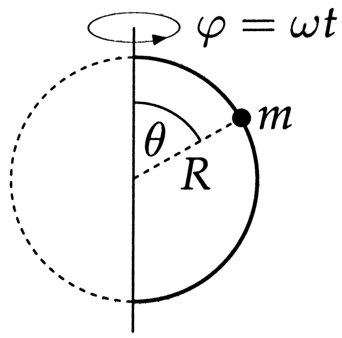
i.) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t)$ und die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(\theta, p, t)$ dieses dynamischen Systems.

ii.) Ist die Hamilton-Funktion gleich der Gesamtenergie des Systems? Ist die Hamilton-Funktion erhalten? Falls die Hamilton-Funktion nicht gleich der Gesamtenergie ist, ist die Gesamtenergie erhalten?

iii.) Geben Sie eine Bewegungsgleichung für den Winkel θ an. Wie groß ist die Periodendauer der Schwingung, wenn $\dot{l} = 0$ gilt, in der Kleinwinkelnäherung?

2 Rotierender Draht 2

Ein Teilchen sei auf einem halbkreisförmig rotierenden Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere mit konstantem ω um die fest vorgegebene Achse im kräftefreien Raum.



i.) Stellen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ auf.

ii.) Berechnen Sie damit die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}$ und stellen Sie die kanonischen Gleichungen auf.

iii.) Bestimmen Sie die Gesamtenergie E und berechne $\frac{dE}{dt}$. Was ist dafür die physikalische Begründung?

iv.) Berechnen Sie $\frac{d\mathcal{H}}{dt}$ und vergleichen Sie $\mathcal{H}$ mit der Energie.

3 Harmonischer Oszillator

Geben Sie die Bewegungsgleichungen des eindimensionalen harmonischen Oszillators mit den Poisson-Klammern an (Kanonische Gleichungen).

Teil II

Schwingungssysteme

4 Gedämpfte Schwingungen mit Anregung

Ein Teilchen der Masse m und Ladung q bewege sich unter dem Einfluss Stokesscher Reibung in einem homogenen, harmonisch mit der Frequenz ω oszillierenden elektrischen Feld.

i.) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den Massepunkt auf.

ii.) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen unter der Bedingung, dass das Teilchen am Anfang ruht und sich im Ursprung eines Bezugssystems befindet.

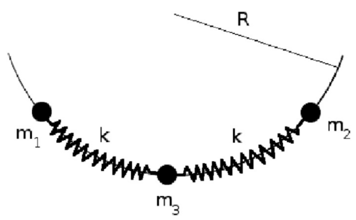
iii.) Diskutieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Unter Stokesscher Reibung versteht man eine Kraft, die proportional zur Geschwindigkeit des Körpers ist und der Bewegungsrichtung entgegenwirkt.

Die Kraft eines elektrischen Feldes $\vec{E}$ auf ein geladenenes Teilchen der Ladung q ist gegeben durch $q\vec{E}$.

5 Drei Massen auf einem Zylindermantel

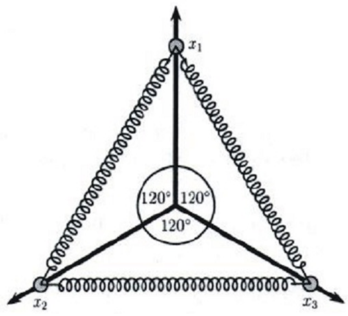
Drei Teilchen sind auf einem Zylindermantel mit dem Radius R gebunden. Die Zylinderachse ist senkrecht zu einem homogenen Gravitatationsfeld der Stärke $\vec{g}$ orientiert. Ferner können sich die Teilchen nur senkrecht zur Zylinderachse bewegen. Die Massen zweier Teilchen sind identisch und sind mit dem dritten über eine Feder mit der Federkonstanten k verbunden. Ferner ist es den Teilchen erlaubt sich zu durchdringen.



i.) Beschreiben Sie das Problem mit dem Lagrangeformalismus und finden Sie die Normalmoden und die entsprechenden Schwingungsfrequenzen des Systems. Betrachten Sie hierbei nur den Fall, dass sich die Massen nahe am unteren Punkt befinden. Skizzieren Sie die Normalmoden.

6 Gekoppelte Perlen

Drei punktförmige Perlen der Masse m bewegen sich reibungsfrei entlang drei idealisierter Drähte. Die Drähte liegen in einer Ebene und gehen vom Koordinatenursprung aus, wobei sie Winkel von $\frac{2}{3}\pi$ einschließen. Weiter sind die Perlen mit linearen Federn mit der Federkonstante k verbunden. Die natürliche Lage der Federn sei $\sqrt{3}l$, sodass sich die Ruhelage der Perlen jeweils im Abstand l vom Ursprung befindet. Diese Gleichgewichtslage wird nun gestört und die Körper oszillieren um die Auslenkungen aus den Ruhelagen x_1, x_2 und x_3. Betrachten Sie kleine Auslenkungen x_1, x_2, $x_3 \ll l$, sodass in erster Näherung die Winkel zwischen den Drähten und den Federn als konstant betrachtet werden können.



i.) Geben Sie die Lagrange-Funktion des System an.

ii.) Leiten Sie aus der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichungen ab. Zeigen Sie, dass sie in der Form

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{3k}{4m} M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

geschrieben werden können und geben Sie die Matrix M an.

iii.) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen, indem Sie das Eigenwertproblem $M\vec{v} = \lambda\vec{v}$ behandeln.

Berechnen Sie die Eigenwerte λ_i.

Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{v}_i$.