Michael Schrapp

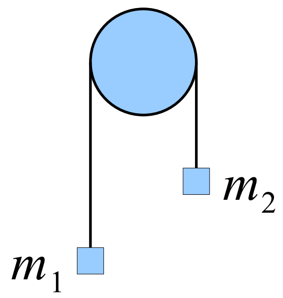
Übung

Ferienkurs *Theoretische Mechanik 2010*

Lagrange Formalismus

1 Atwoodsche Fallmaschine

Gegeben Sei eine Atwoodsche Fallmaschine im Schwerefeld der Erde (siehe Bild). Die Länge des Seils sei l und konstant. Bestimemn sie mit dem Lagrange-Formalisums 1. Art die Beschleunigung der Masse m_1 sowie die wirkende Zwangskraft.



Lösung

zunächst wählen wir als Koordinaten z_1 undz_2, jeweils als abstand der Massen zum Aufhängepunkt. Daraus ergibt sich die folgende Zwangsbedingung

$$f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 + l = 0$$

und

$$\nabla f(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aus den Lagrange Gleichungen 1. Art bekommen wir:

$$m_1\ddot{z}_1 = -m_1 g + \lambda \cdot 1$$

$$m_2\ddot{z}_2 = -m_2 g + \lambda \cdot 1$$

Nun setzen wir $\ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2$ (2 maliges ableiten der Zwangsbedingung) in die 2. Gleichung ein und subtrahieren beide Gleichungen und erhalten hieraus die Beschleunigung der Masse m_1

$$\rightarrow (m_1 + m_2)\ddot{z}_1 = (m_2 - m_1)g$$

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$$

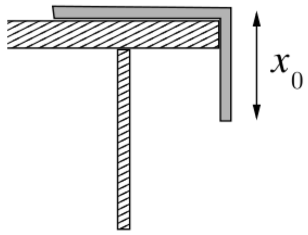
Um die Zwangskraft $\vec{Z} = \nabla f \cdot \lambda$ zu bekommen, lösen wir die Bewegungsgleichungen jeweils nach λ auf.

$$\lambda = m_1\ddot{z}_1 + m_1 g = (m_1\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} + m_1)g = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Aus Symmetrie Gründen folgt somit:

$$Z_1 = Z_2 = \lambda = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

2 Abrutschendes Seil



Ein Seil der Länge l und der konstanten Längenmassendichte λ rutscht nach dem Loslassen ohne Reibung über eine Tischkante herunter. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie mit den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \qquad 0 < x_0 < l \\ \dot{x}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Lösung

Die x-Achse zeigt in diesem Fall vertikal nach oben. Aus der konstanten Massendichte erhält man für die Energien:

$$T = \frac{\lambda l}{2}\dot{x}^2$$

$$V = -\lambda g \int_0^x x' \mathrm{d}x' = \frac{-\lambda g x^2}{2}$$

Für die Lagrange-Funktion gilt demnach:

$$\mathcal{L} = \frac{\lambda l}{2}\left(\dot{x}^2 + \frac{g}{l}x^2\right)$$

Die Bewegungsgleichung ergibt sich dann aus:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \lambda l \ddot{x} - \lambda g x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{x} - \frac{g}{l}x = 0$$

Mit dem Ansatz $x(t) = A \cdot e^{\beta t}$ kommt man auf die Lösung:

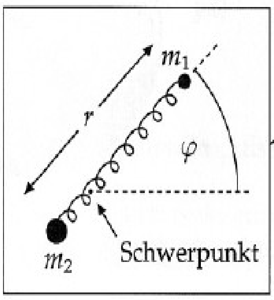
$$x(t) = A_1 e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} + A_2 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}$$

Die Anfangsbedingungen liefern: $A_1 = A_2 = \frac{x_0}{2}$ und damit:

$$\underline{x(t) = x_0 \cdot \frac{e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t}}{2} = x_0 \cdot \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)}$$

3 Molekülschwingungen (Klausuraufgabe)

Ein 2-atomiges Molekül kann außer Schwingungen auch Rotationsbewegungen ausführen. Der Einfachheit halber sollen nur Bewegungen in einer festen Ebene betrachtet werden.
Das Potential ist dabei über $U(r) = \frac{\mu}{2}\omega_0^2(r - r_0)^2$ gegeben, wobei $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ist dabei die sogenannte reduzierte Masse, r der Relativabstand und r_0 der Gleichgewichtsabstand für $\dot{\varphi} = 0$ ist.



Es werden nur Rotationen und Schwingungen in dieser Ebene betrachtet.

i) Zeigen Sie, dass in einem Inertialsystem, in dem der Schwerpunkt am Ursprung ruht, das Molekül durch folgende Lagrange-Funktion beschrieben wird:

$$\mathcal{L} = \tfrac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Lösung

Zunächst müssen wir uns Gedanken machen, welche generalisierten Koordinaten wir verwenden. Die Geometrie des Problems bietet hierbei φ und r an. um die Ortsvektoren der Massepunkte 1 und 2 in φ und r anzugeben, verwenden wir die Schwerpunkterhaltung (Aufgabenstellung), d.h.

$$\vec{S} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \rightarrow m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0$$

$$r = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Nach kurzer Rechnung findet man:

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{-m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}$$

Für die kinetische Energie gilt:

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\vec{r}}_2^2$$

$$= \frac{m_1}{2}\frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{m_2}{2}\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^2$$

$$\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\left(\frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\right) = \frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Es werden nun die ebenen Polarkoordinaten φ und r eingeführt (siehe Vorlesung). Es ergibt sich:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$$

Für die Lagrange-Funktion folgt:

$$\mathcal{L} = \tfrac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

ii) Geben Sie 2 Erhaltungsgrößen mit Begründung an.

Lösung

Schaut man sich die Lagrange-Funktion etwas näher an, so sieht man, dass $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0$. D.h. φ ist eine zyklische Koordinate und aus

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = 0$$

folgt die Erhaltungsgröße:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = const. = \mu r^2\dot{\varphi} =: l$$

l entspricht dabei dem Betrag des Drehimpulses.

Die Gesamtenergie $E = T + U$ ist ebenfalls erhalten, da die Lagrange Funktion nicht explizit zeitabhängig ist.

iii) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und vereinfachen Sie diese. Drücken Sie die Gleichung für die Radialbewegung durch den Abstand $\rho = r - r_o$ von der Ruhelage aus.

Lösung

Die Euler-Lagrange-Gleichung für die Radialkomponente r: $\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0$ ergibt:

$$\frac{d}{dt}\mu\dot{r} = \dot{\varphi}^2 - \mu\omega_0^2(r - r_0)$$

Mit der Beziehung $\mu r^2\dot{\varphi} = l$ gilt:

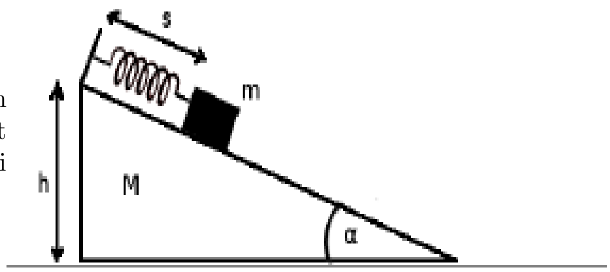
$$\mu\ddot{r} - \mu r\frac{l^2}{\mu^2 r^4} + \mu\omega_0^2(r - r_0) = 0$$

Mit $r - r_0 = \rho$ und $\dot{r} = \dot{\rho}$ folgt die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\rho} - \frac{l^2}{\mu^2(\rho + r_0)^3} + \omega_0^2\rho = 0 \tag{1}$$

4 Masse auf schiefer Ebene

Eine Masse m ist an einem Keil mit Masse M durch eine Feder (Federkonstante k) verbunden. Der Keil hat einen Neigungswinkel von α und kann sich reibungsfrei entlang der horizontalen Ebene bewegen.



i) Für die Ruhelänge der Feder von d (ohne Masse), berechnen Sie die Länge der Feder s_0 falls die Masse und der Keil beide in Ruhe sind.

Lösung

Wenn die Masse m in Ruhe ist, verschwindet die Summe der Kräfte parallel zur schiefen Ebene

$$mg\sin\alpha - k(s_0 - d) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_0 = \frac{mg\sin\alpha}{k} + d$$

ii) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in Abhängigkeit der x-Koordinaten des Keils und der Federlänge s auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen.

Lösung

Sei die Höhe des Keils gleich h. Verwendet man als generalisierte Koordinaten x und s, so hat die Masse m die kartesischen Koordinaten

$$(x + s\cos\alpha;\ h - s\sin\alpha)$$

Daraus kann man die Geschwindigkeit und damit auch die kinetische Energie bestimmen:

$$T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)^2 + (\dot{s}\sin\alpha)^2\right]$$

Die potentielle Energie setzt sich aus Lageenergie von m, sowie Spannenergie der Feder zusammen

$$V = \frac{k}{2}(s-d)^2 + mg(h - s\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = T - V = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left[(\dot{x} + \dot{s}\cos\alpha)^2 + (\dot{s}\sin\alpha)^2\right] - \frac{k}{2}(s-d)^2 - mg(h - s\sin\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \underline{(M+m)\ddot{x} + m\ddot{s}\cos\alpha = 0}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{s}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial s} = \underline{m\ddot{x}\cos\alpha + m\ddot{s} + ks - (kd + mg\sin\alpha) = 0}$$

ii) Ermittlen Sie eine zyklische Koordinate und die dazugehörige Erhaltungsgröße.

Lösung

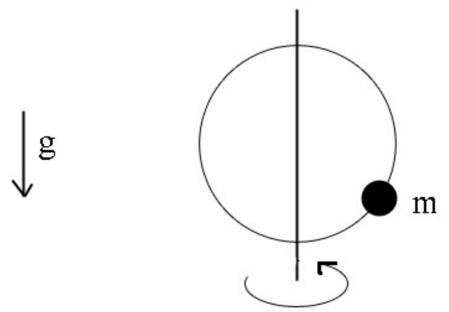
Die Lagrange-Funktion hängt nicht von x ab, daher ist x zyklisch. Damit ist der dazu konjugierte Impuls p_x eine Erhaltungsgröße. Dieser ist aber **nicht** der kinematische Impuls $p = (M+m)\dot{x}$, sondern:

$$p_x = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} = (M+m)\dot{x} + m\dot{s}\cos\alpha = \text{const.}$$

wie man aus der ersten Bewegungsgleichung bereits erkennt.

5 Rotierender Massepunkt

Betrachten Sie einen masselosen Ring der im Schwerefeld der Erde mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und auf dem eine Masse m reibungsfrei gleiten kann.



i) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße.

Lösung

Die z- Achse zeige nach unten und der 0 Punkt ist der Mittelpunkt des Rings. Für die Lagrange-Funktion gilt allgemein:

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (mgz)$$

Damit folgt in Kugelkoordinaten (siehe Vorlesung):

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2\theta) + mgr\cos\theta$$

Beachte: r und $\dot{\varphi} = \omega$ sind Konstanten.
Die Euler-Lagrange-Gleichungen für den Winkel θ liefert:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta}$$

$$\to mr^2\ddot{\theta} = m\dot{\varphi}^2 r^2 \sin\theta\cos\theta - mgr\sin\theta \tag{2}$$

Da $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0$, ist φ eine zyklische Koordinate und wir bekommen die Erhaltungsgröße (Drehimpulserhaltung):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = const. = mr^2 \sin^2\theta\dot{\varphi} =: l(= L_z)$$

ii) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage θ und zeigen Sie dass diese von 0 verschieden sein kann.

Lösung

In der Gleichgewichtslage gilt $\dot{\theta} = 0$, d.h. der Winkel θ ändert sich zeitlich nicht. Nehmen wir die Bewegungsgleichung (**??**) her und setzen $\ddot{\theta} = 0$ so erhalten wir:

$$\cos\theta = \frac{g}{r\omega^2}$$

Fallunterscheidung:

Gilt $\frac{g}{r\omega^2} > 1$, also $\frac{g}{r} > \omega^2$ so folgt als einzige Lösung $\theta = 0$
Gilt $\frac{g}{r\omega^2} > 1$, also $\frac{g}{r} < \omega^2$ und wir bekommen die beiden Lösungen: $\theta = \pm\arccos(\frac{g}{r\omega^2})$

6 Fallender Stab

Ein Masseloser Stab der Länge l habe eine punktförmige Masse m an einem Ende befestigt. Der Stab stehe auf einem rutschfesten Tisch. Bei kleinen Auslenkungen aus der senkrechten Position fällt der Stab aufgrund der Gravitation um.

i) Stellen Sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichung auf.

Lösung

Als generalisierte Koordinate bietet sich der Winkel ϕ des Stabes zur senkrechten an. Es gilt somit für die kinetische und potentielle Energie in ebenen Polarkoodinaten:

$$T = \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2$$

$$V = mgl\cos\phi$$

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}l^2\dot{\phi}^2 - mgl\cos\phi$$

Es ergibt sich mit der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichung:

$$ml^2\ddot{\phi} = mgl\sin\phi$$

ii) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = \phi_0, \dot{\phi}(0) = 0$$

in Kleinwinkelnäherung.

Lösung

In Kleinwinkelnäherung bekommt die Bewegungsgleichung folgende Form:

$$\ddot{\phi} = \frac{g}{l}\phi$$

Wir machen den Ansatz $\phi(t) = C\exp\lambda t$ zu Lösung des Anfangswertsproblems. Einsetzen liefert Bedingungsgleichung für λ:

$$\lambda^2 - \frac{g}{l} = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\phi(t) = C_1 e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + C_2 e^{\sqrt{-\frac{g}{l}}t}$$

setzen wir die Anfangsbedingungen ein und benutzen die Definition $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, so bekommen wir als Lösung:

$$\phi(t) = \phi_0 \cosh(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$$