Michael Schrapp

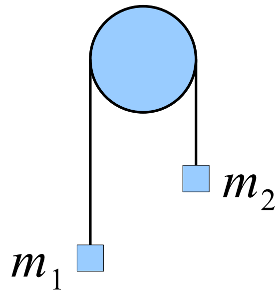
Übung

Ferienkurs *Theoretische Mechanik 2010*

Lagrange Formalismus

1 Atwoodsche Fallmaschine

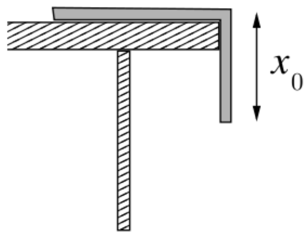
Gegeben Sei eine Atwoodsche Fallmaschine im Schwerefeld der Erde (siehe Bild). Die Länge des Seils sei l und konstant. Bestimemn sie mit dem Lagrange-Formalisums 1. Art die Beschleunigung der Masse m_1 sowie die wirkende Zwangskraft.



2 Abrutschendes Seil

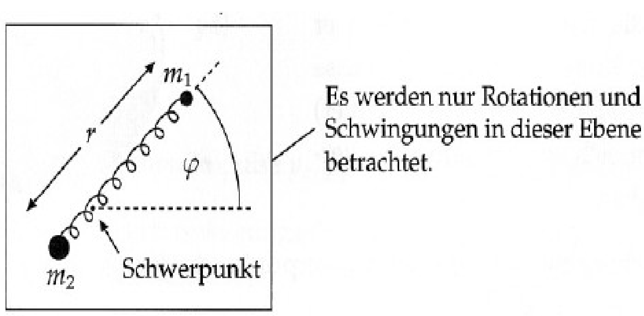
Ein Seil der Länge l und der konstanten Längenmassendichte λ rutscht nach dem Loslassen ohne Reibung über eine Tischkante herunter. Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und lösen Sie sie mit den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = x_0 \qquad 0 < x_0 < l$$
$$\dot{x}(0) = 0$$



3 Molekülschwingungen (Klausuraufgabe)

Ein 2-atomiges Molekül kann außer Schwingungen auch Rotationsbewegungen ausführen. Der Einfachheit halber sollen nur Bewegungen in einer festen Ebene betrachtet werden.
Das Potential ist dabei über $U(r) = \frac{\mu}{2}\omega_0^2(r - r_0)^2$ gegeben, wobei $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$ ist dabei die sogenannte reduzierte Masse, r der Relativabstand und r_0 der Gleichgewichtsabstand für $\dot{\varphi} = 0$ ist.



i) Zeigen Sie, dass in einem Inertialsystem, in dem der Schwerpunkt am Ursprung ruht, das Molekül durch folgende Lagrange-Funktion beschrieben wird:

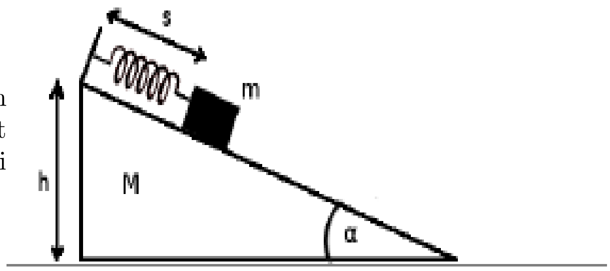
$$\mathcal{L} = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

ii) Geben Sie 2 Erhaltungsgrößen mit Begründung an.

iii) Stellen Sie die Bewegungsgleichung auf und vereinfachen Sie diese. Drücken Sie die Gleichung für die Radialbewegung durch den Abstand $\rho = r - r_o$ von der Ruhelage aus.

4 Masse auf schiefer Ebene

Eine Masse m ist an einem Keil mit Masse M durch eine Feder (Federkonstante k) verbunden. Der Keil hat einen Neigungswinkel von α und kann sich reibungsfrei entlang der horizontalen Ebene bewegen.



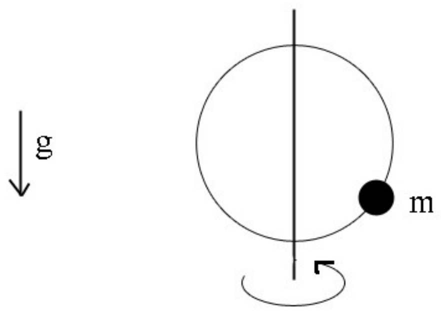
i) Für die Ruhelänge der Feder von d (ohne Masse), berechnen Sie die Länge der Feder s_0 falls die Masse und der Keil beide in Ruhe sind.

ii) Stellen Sie die Lagrange-Funktion des Systems in Abhängigkeit der x-Koordinaten des Keils und der Federlänge s auf und ermitteln Sie die Bewegungsgleichungen.

iii) Ermittlen Sie eine zyklische Koordinate und die dazugehörige Erhaltungsgröße.

5 Rotierender Massepunkt

Betrachten Sie einen masselosen Ring der im Schwerefeld der Erde mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotiert und auf dem eine Masse m reibungsfrei gleiten kann.



i) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße.

ii) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage θ und zeigen Sie dass diese von 0 verschieden sein kann.

6 Fallender Stab

Ein Masseloser Stab der Länge l habe eine punktförmige Masse m an einem Ende befestigt. Der Stab stehe auf einem rutschfesten Tisch. Bei kleinen Auslenkungen aus der senkrechten Position fällt der Stab aufgrund der Gravitation um.

i) Stellen Sie mit Hilfe der Lagrange-Funktion die Bewegungsgleichung auf.

ii) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen

$$\phi(0) = \phi_0, \dot{\phi}(0) = 0$$

in Kleinwinkelnäherung.