1.1 $\vec{F} = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}$

a) $\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$

Parametrisiere nun den Weg $x(t) = t \quad y(t) = t \quad z(t) = t$

$r(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \qquad \frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{dy}{dt} = 1 \quad \frac{dz}{dt} = 1$

$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ dt \\ dt \end{pmatrix} = \int_0^1 3t^2 \, dt = \underline{\underline{1}}$

b) i) $(0,0,0) \to (1,0,0) \qquad x(t) = t \quad y(t) = 0 \quad z(t) = 0$

$\frac{dx}{dt} = 1 \quad \frac{dy}{dt} = 0 \quad \frac{dz}{dt} = 0$

$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} x \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dt \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

ii) $(1,0,0) \to (1,1,0) \qquad x(t) = 0 \quad y(t) = t \quad z(t) = 0$

$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = 1 \quad \frac{dz}{dt} = 0$

$\int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1 \cdot t \\ t \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ dt \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

iii) $(1,1,0) \to (1,1,1)$ $\quad x(t)=1 \quad y(t)=1 \quad z(t)=t$

$$\frac{dx}{dt}=0 \quad \frac{dy}{dt}=0 \quad \frac{dz}{dt}=1$$

$$\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1\cdot 1 \\ 1\cdot t \\ t\cdot 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dt \end{pmatrix} = \int_0^1 t\,dt = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

$$i) + ii) + iii) = \frac{1}{2}$$

c) Da das Wegintegral der Kraft vom Weg abhängt, wie man an a) und b) sieht, muß gelten:
$\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$

1.2)

Zu berechnen ist

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_u} \\ \frac{\partial}{\partial y_u} \\ \frac{\partial}{\partial z_u} \end{pmatrix} \times \vec{F}_{ub}$$

Hierzu berechnen wir zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x_u} \cdot \frac{1}{|\vec{r}_u - \vec{r}_b|^3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_u} \left((x_u - x_b)^2 + (y_u - y_b)^2 + (z_u - z_b)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 2(x_u - x_b) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \left[(x_u - x_b)^2 + (y_u - y_b)^2 + (z_u - z_b)^2 \right]^{-\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{-3(x_u - x_b)}{|\vec{r}_u - \vec{r}_b|^5}$$

analog

$$\frac{\partial}{\partial y_u} \frac{1}{|\vec{r}_u - \vec{r}_b|^3} = \frac{-3(y_u - y_b)}{|\vec{r}_u - \vec{r}_b|^5}$$

$$\frac{\partial}{\partial z_u} \frac{1}{|\vec{r}_u - \vec{r}_b|^3} = \frac{-3(z_u - z_b)}{|\vec{r}_u - r_b|^5}$$

$$\vec{\nabla}_a \times \vec{F}_{ab} = q_a q_b \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_a} \\ \frac{\partial}{\partial y_a} \\ \frac{\partial}{\partial z_a} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{x_a - x_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} \\ \frac{y_a - y_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} \\ \frac{z_a - z_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemplarisch die 1. Komponente:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{F}_{ab}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y_a} \frac{z_a - z_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3} - \frac{\partial}{\partial z_a} \frac{y_a - y_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}$$

$$= (z_a - z_b) \cdot \frac{-3(y_a - y_b)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^5} - (y_a - y_b) \cdot \frac{-3(z_a - z_b)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^5}$$

$$= 0$$

2.1 1) $\ddot{x} + \omega^2 x = f e^{-\beta t}$

x_{Hom} : $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ Ansatz $x = e^{i\alpha t}$

$\dot{x} = i\alpha e^{i\alpha t}$

$\ddot{x} = -\alpha^2 e^{i\alpha t}$

Einsetzen liefert

$-\alpha^2 e^{i\alpha t} + \omega^2 e^{i\alpha t} = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^2 = \omega^2 \quad \Rightarrow \alpha_1 = \omega \quad \alpha_2 = -\omega$

Die Lösung von x_{Hom} lautet dann

$x_{Hom} = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t}$

Finden einer Lösung x_p für

$\ddot{x} + \omega^2 x = f \cdot e^{-\beta t}$ Ansatz $x_p = C \cdot e^{-\beta t}$

$\ddot{x}_p = \beta^2 C e^{-\beta t}$

β

Einsetzen liefert:

$\beta^2 \cdot C \cdot e^{-\beta t} + \omega^2 \cdot C \cdot e^{-\beta t} = f \cdot e^{-\beta t}$

$\Rightarrow C = \frac{f}{\beta^2 + \omega^2} \qquad x_p = \frac{f}{\beta^2 + \omega^2} \cdot e^{-\beta t}$

$x(t) = x_{Hom} + x_p = A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{-i\omega t} + \frac{f}{\beta^2 + \omega^2} \cdot e^{-\beta t}$

ii) $m\ddot{z} + \mu\dot{z} = -mg$

löse zunächst $m\ddot{z} + \mu\dot{z} = 0$ Ansatz $\dot{z} = A \cdot e^{\alpha t}$

$\ddot{z} = \alpha A \cdot e^{\alpha t}$

$\Rightarrow m\alpha A\, e^{\alpha t} + \mu A \cdot e^{\alpha t} = 0$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{\mu}{m}$ $\Rightarrow \dot{z}(t) = A \cdot e^{-\frac{\mu}{m} \cdot t}$

Durch integration erhält man $z(t)$

$z(t) = -\frac{m}{\mu} \cdot A \cdot e^{-\frac{\mu}{m} \cdot t} + C = \tilde{A}\, e^{-\frac{\mu}{m} \cdot t} + C$

Eine Loesung für z_p

$m\ddot{z}_p + \mu\dot{z}_p = -m \cdot g$ Ansatz $z_p = \beta \cdot t$

$\dot{z} = \beta$

$\ddot{z} = 0$

$\Rightarrow \mu\beta = -mg \Leftrightarrow \beta = -\frac{mg}{\mu}$

$z_p = -\frac{mg \cdot t}{\mu}$

Insgesamt $z_{Hom} + z_p = \tilde{A} \cdot e^{-\frac{\mu}{m} \cdot t} + C - \frac{mg \cdot t}{\mu}$

Anfangsbedingung $z(0) = 0$ liefert $\tilde{A} = -C$

$\dot{z}(t) = C \cdot \frac{\mu}{m} \cdot e^{-\frac{\mu}{m} \cdot t} - \frac{mg}{\mu}$

$\dot{z}(0) = 1 \Leftrightarrow C\frac{\mu}{m} - \frac{mg}{\mu} = 1 \Leftrightarrow C - \frac{m^2 g}{\mu^2} = \frac{m}{\mu}$

$\Leftrightarrow C = \frac{m\mu - m^2 g}{\mu^2}$

iii) $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$

x_{Hom}: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ Ansatz $x = e^{\alpha t}$

$\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}$

$\ddot{x} = \alpha^2 \cdot e^{\alpha t}$

Einsetzen

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\lambda \alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\lambda\alpha + \omega_0^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\lambda\alpha + \lambda^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \lambda)^2 = \lambda^2 - \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \alpha_\pm = -\lambda \pm \underbrace{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}}_{\in \mathbb{C} \text{ im allgemeinen}}$$

Also $x_{Hom} = A e^{\alpha_+ t} + B \cdot e^{\alpha_- t}$

nun x_p: $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$

Ansatz $x_p = c_1 \cdot \cos\omega t + c_2 \cdot \sin\omega t$

$\dot{x}_p = -c_1 \omega \sin\omega t + c_2 \omega \cos\omega t$

$\ddot{x}_p = -c_1 \omega^2 \cos\omega t - c_2 \omega^2 \sin\omega t$

Einsetzen liefert

$$-c_1\omega^2\cos\omega t - c_2\omega^2\sin\omega t - 2\lambda c_1\omega\sin\omega t + 2\lambda c_2\omega\cos\omega t$$
$$+\omega_0^2 c_1\cos\omega t + \omega_0^2 c_2 \sin\omega t = f_0\cos(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich liefert:

I) $-c_1\omega^2 + 2\lambda\omega c_2 + \omega_0^2 c_1 = f_0$

II) $-c_2\omega^2 - 2\lambda\omega c_1 + \omega_0^2 c_2 = 0$

Umformung von II ergibt

$$c_1 = c_2 \cdot \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\lambda\omega}$$

Einsetzen in I bringt schließlich

$$c_2 = \frac{f_0}{\left(\frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\lambda\omega}\right)\cdot(\omega^2+\omega_0^2) - 2\lambda\omega} \Rightarrow c_1 = \frac{\omega^2-\omega_0^2}{2\lambda\omega}\cdot c_2$$

Die allgemeine Lösung ist dann

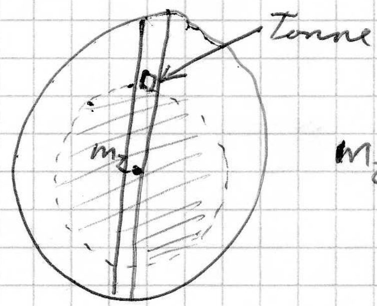
$$x(t) = A \cdot e^{\alpha_+ t} + B \cdot e^{\alpha_- t} + c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$$

2.2 Mülltonne : m_1

Gravitationsgesetz : $F = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}$

$$\Rightarrow m_1 \cdot \ddot{r} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Nun ist zu beachten, dass m_2 nicht die Erdmasse ist, sondern nur der Teil der "unter der Mülltonne liegt.
Die äußere Kugelschale liefert eine Nettokraft von $F = 0$



$$m_2 = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho_E$$

eingesetzt in die Dgl:

$$m_1 \ddot{r} = -\frac{G m_1}{r^2} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_E$$

$$= -\frac{4\pi}{3} G m_1 \rho_E \cdot r$$

$$\Leftrightarrow \ddot{r} + \frac{4\pi G \rho_E}{3} \cdot r = 0$$

So eine Dgl haben wir in 2.1 i) gelöst

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ hier $\omega^2 = \frac{4\pi G \rho_E}{3}$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

3 a) Da nur konservative Kräfte wirken gilt Energieerhaltung

$$E = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi)$$

Bei $\varphi = \pi$ ist $\dot{\varphi} = 0$

$\Rightarrow E = 2mgl$

$\Rightarrow 2mgl = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi)$

Diese Gleichung kann nach $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ aufgelößt werden und dann durch integration gelößt werden

Zunächst: $mgl = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi \quad | + mgl\cos\varphi$

$\Leftrightarrow mgl(1+\cos\varphi) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 \quad | : \frac{m}{2} l^2$

$\Leftrightarrow \frac{2g}{l}(1+\cos\varphi) = \dot{\varphi}^2 \quad | \sqrt{}$

$\sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{1+\cos\varphi} = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$

$\Rightarrow dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}}$

$\int_0^{t_0} dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}}$ Wir berechnen zunächst die Zeit bis zum Scheitelpunkt.

$\Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi} \left(\cos\frac{\varphi}{2}\right)^{-1} d\varphi$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\, 2 \cdot \ln\tan\left(\frac{\varphi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\Big|_0^{\pi}$

$= \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \ln\left[\frac{\tan\frac{\pi}{2}}{\tan\frac{\pi}{4}}\right]$

Die allgemeine Lösung $\varphi(t)$ erhält man, indem man in den Integralen $\hat{t}$ statt t_0 und $\tilde{\varphi}$ statt π in die Grenzen einsetzt

Also

$$\int_0^{\hat{t}} dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\tilde{\varphi}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+\cos\varphi}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{t} = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\tilde{\varphi}}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \hat{t} = \ln\left[\frac{\tan\left(\frac{\tilde{\varphi}}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\sqrt{\frac{g}{l}}\hat{t}} = \left[\frac{\tan\left(\frac{\tilde{\varphi}}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \hat{t}} = \tan\left(\frac{\tilde{\varphi}}{4}+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \hat{t}}\right] = \frac{\tilde{\varphi}}{4} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\varphi}(\hat{t}) = 4 \arctan\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \hat{t}}\right] - \pi$$

b) Hier gilt $E = m \cdot g \cdot h_{max} = m \cdot g \cdot l \cdot (1-\cos\varphi_0)$

$$E = m \cdot g \cdot l\,(1-\cos\varphi_0) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\,(1-\cos\varphi)$$

Auch hier können wir wieder nach $\dot{\varphi}$ auflösen

Das liefert diesmal

$$\int_0^{T/4} dt = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$$

Kleinwinkelnäherung

$$\overset{\downarrow}{=} \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\left(-\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi_0^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{(\varphi_0^2 - \varphi^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\varphi_0 \sqrt{1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_0^2}}}$$

Substituiere $x = \frac{\varphi}{\varphi_0}$, $dx = \frac{d\varphi}{\varphi_0}$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{T/4} dt = \frac{T}{4}$$

also $\frac{T}{4} = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot 2\pi$

bzw $\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$

$$\Rightarrow \qquad \dot{r}^2 = \frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(r)) \rightarrow \frac{2}{m}(E - (-\infty)) = \infty \text{ für } r \rightarrow 0$$

4. Gravitationsfeld der Erde

Aufgabe:

Ein Körper der Masse m bewegt sich *ausschließlich radial* im Gravitationsfeld der Erde (Radius R, Masse M)..

1. Wie lauten die Gravitationskraft und das Gravitationspotential, die auf den Körper im Abstand r vom Erdmittelpunkt wirken.
2. Geben Sie die Gesamtenergie des Körpers im Gravitationsfeld an. Die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers in seinem Startpunkt auf der Erdoberfläche sei v_0. Wie groß ist seine Geschwindigkeit v in Abhängigkeit des Abstandes r vom Erdmittelpunkt?
3. Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mindestens sein, damit der Körper das Gravitationspotential der Erde überwinden kann?
4. Wie lautet der Zusammenhang zwischen Gravitationskonstante G und der lokalen Gravitationsbeschleunigung g an der Erdoberfläche?
5. Die International Space Station kreist in einer Umlaufbahn ca. $d = 350\,\text{km}$ über der Erdoberfläche ($R = 6400\,\text{km}$). Wie groß ist dort in etwa die lokale Gravitationsbeschleunigung g_{ISS} im Vergleich zu g auf der Erdoberfläche? Weshalb spricht man trotzdem von Schwerelosigkeit?

Lösung:

1. Wenn man den Ursprung des Koordinatensystems in den Erdmittelpunkt legt, ergibt sich für die Gravitationskraft auf den Körper am Ort $\vec{r}$:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Das radialsymmetrische Gravitationspotential lautet demnach:

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

Kontrolle:

$$-\vec{\nabla}U(r) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}U(r)\frac{\vec{r}}{r} = -G\frac{mM}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{F}(\vec{r})$$

2. Da er nach Vorraussetzung nur radiale Bewegungen ausführen soll, lautet die Gesamtenergie E des Körpers:

$$\begin{aligned} E &= T + U(r) \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 - G\frac{mM}{r} \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit $v(r)$ in Abhängigkeit des Abstandes zum Erdmittelpunkt erhält man über die Energieerhaltung:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}v_0^2 - G\frac{mM}{R} = \text{const} \\ &= \frac{m}{2}v^2(r) - G\frac{mM}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{m}{2}v^2(r) &= \frac{m}{2}v_0^2 + GmM(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}) \\ \Rightarrow \quad v(r) &= \sqrt{v_0 + 2GM(\frac{1}{r} - \frac{1}{R})} \end{aligned}$$

(Das Vorzeichen von $v(r) = \dot{r}(r)$ ist positiv, weil wir davon ausgehen, dass sich das Teilchen nicht in die Erdoberfläche hineinbewegt...)

3. Außerhalb des Gravitationspotentials der Erde, also für $r \to \infty$ beträgt die potentielle Energie des Teilchens $U(r \to \infty) = 0$. Damit sich das Teilchen dort aufhalten kann, muss es also wegen $E \geqq U_{\text{eff}}$ eine positive Energie besitzen. Nach Energieerhaltung muss also auch am Startpunkt auf der Erdoberfläche gelten:

$$E = \frac{m}{2}v_0^2 - G\frac{mM}{R} \geqq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{m}{2}v_0^2 &\geqq G\frac{mM}{R} \\ \Rightarrow \quad v_0 &\geqq \sqrt{\frac{2GM}{R}} \end{aligned}$$

4. Auf der Erdoberfläche gilt:

$$F(R) = -mg = -G\frac{mM}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad g = G\frac{M}{R^2}$$

5. Auf der ISS gilt:

$$F(R+d) = -mg_{\text{Iss}} = -G\frac{mM}{(R+d)^2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{g_{\text{ISS}}}{g} &= \frac{R^2}{(R+d)^2} \\ &= \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{g_{\text{ISS}}}{g} = \frac{R^2}{(R+d)^2} \approx 0.9$$

Die Raumstation nutzt bei ihrer Umkreisung der Erde die Gravitationskraft als Zentripetalkraft. Im Bezugssystem eines Besatzungsmitgliedes auf der ISS wirkt daher noch die Zentrifugalkraft, die stets radial vom Mittelpunkt der Kreisbahn, dem Gravitationszentrum, wegweist und die Schwerkraft damit genau kompensiert. Deswegen ist es berechtigt trotz einer noch sehr hohen Gravitationsbeschleunigung g_{ISS} von Schwerelosigkeit zu sprechen.

5) a) zunächst Transformation auf Relativkoordinaten
vgl. Skript

$$E = \frac{m_1}{2}\vec{v}_1^{\,2} + \frac{m_2}{2}\vec{v}_2^{\,2} - \frac{G m_1 m_2}{|r_1 - r_2|}$$

$$\Rightarrow E = \frac{M}{2}\dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

da nur interne Kräfte wirken ist $\dot{\vec{R}} = 0$

$$\Rightarrow E = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{G m_1 m_2}{r}$$

nun Transformation auf Polarkoordinaten

$$\vec{r} = \rho \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + \rho\dot{\varphi}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$$

damit folgt $E = \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{\mu}{2}\rho^2\dot{\varphi}^2 - \frac{G m_1 m_2}{\rho}$

Da wir Drehimpulserhaltung haben gilt $\dot{\varphi} = \frac{L}{\mu r^2}$

$$\Rightarrow E = \frac{\mu}{2}\dot{\rho}^2 + \underbrace{\frac{L^2}{2\mu\rho^2} - \frac{G m_1 m_2}{\rho}}_{= U_{eff}(\rho)}$$

5b) Auf einer Kreisbahn haben wir $\dot{\rho} = 0$

Also $E = U_{eff}(\rho)$

$\Rightarrow U_{eff}$ muß ein Maximum bei ρ haben

bzw. $-\frac{dU_{eff}}{d\rho} = F = 0$

$$-\frac{dU}{d\rho} = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} + \frac{L^2}{\mu r^3} = 0 \quad \Big| \; L = \mu \rho^2 \omega$$

$$\Leftrightarrow \; 0 = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} + \mu r \omega^2$$

$$\Leftrightarrow \; r = \sqrt[3]{\frac{G m_1 m_2}{\mu \omega^2}}$$

6)

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + U(x)$$

man setzt nun $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ und ~~löst~~ löst nach dt auf

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U(x)\right)}}$$

Die Periodendauer erhält man indem man von einem Wendepunkt zum anderen integriert und mit 2 multipliziert

(Eine Periode ist ja hin und zurück

$$T = 2 \cdot \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(x)\right]}}$$

der Rest ist Integration die sich schwer gestalten kann.

(2+3) integrieren:

(4) $\dot{y} = -2\omega x \sin\Theta + \cancel{x}$ $\quad \dot{z} = 2\omega x \cos\Theta - gt + \cancel{\mathcal{D}}$ (5)

in (1) $\ddot{x} = \underbrace{2\omega(-2\omega x \sin^2\Theta - 2\omega x \cos^2\Theta)}_{\omega^2 \approx 0} + 2\omega \cos\Theta\, gt$

$\dot{x} = \omega g t^2 \cos\Theta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{3}\omega g t^3 \cos\Theta$ $\quad$ keine Int.-konst. da aus Ruhelage heraus beschl.

in (4+5) $\quad \dot{y} = 0 \quad \dot{z} = -gt$

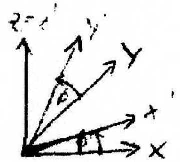
$\Rightarrow y = 0 \quad z = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$ $\quad$ hier Int.-konst., da $z(0) \neq 0$

iv) $h_0 = 200\,m \quad \Theta = 48°$

$0 = z = h_0 - \frac{1}{2}g t_0^2 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \approx 6s$

$x \approx 4{,}1\,cm \qquad y = 0$

3.i) $R_3(\phi) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C\alpha \\ -S\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$



↳ x-Achse im System (x', y', z')

ii) $R^T R = 1 \quad \left(R_3(\psi) R_1(\Theta) R_3(\phi)\right)^T \left(R_3(\psi) R_1(\Theta) R_3(\phi)\right) = R_3(\phi)^T R_1(\Theta)^T \underbrace{R_3(\psi)^T R_3(\psi)}_{=1} R_1(\Theta) R_3(\phi)$

$g = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$ $\qquad\qquad$ $U = -m\vec{g}\,\vec{r}_{IS}$

$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}_{IS}^{\,2} + m\vec{g}\,\vec{r}_{IS}$ $\qquad$ Ohne Beschleunigung

$\vec{r}_{IS} = \vec{r}_{(KS)} + \frac{1}{2}at^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad\qquad$ $\vec{r} = l\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ -\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2}\left[\dot{\vec{r}} + \left(\frac{1}{2}at^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)^{\cdot}\right]^2 + mg\vec{r} =$$

$$= \frac{m}{2}\begin{pmatrix} l\cos\varphi\dot{\varphi} + at \\ l\sin\varphi\dot{\varphi} \end{pmatrix}^2 + mgl\cos\varphi =$$

$$= \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mlat\cos\varphi\dot{\varphi} + \frac{m}{2}a^2t^2 + mgl\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi} + mlat\cos\varphi) - (-mlat\sin\varphi\dot{\varphi} - mgl\sin\varphi) = 0$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + mla\cos\varphi - \cancel{mlat\sin\varphi\dot{\varphi}} + \cancel{mlat\sin\varphi\dot{\varphi}} + mgl\sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = -\frac{a}{l}\cos\varphi \qquad \varphi \ll 1,\ a \ll 1$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = -\frac{a}{l}$$

$$\varphi_h(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\varphi_p(t) = -\frac{a}{g}$$

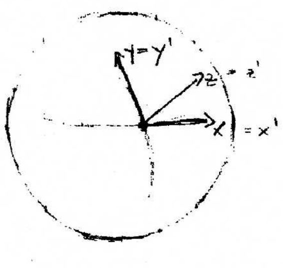
$$\varphi_{ges} = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{a}{g}$$

$\varphi(0) = 0 \quad \dot{\varphi}(0) = 0:$ $\qquad$ $\dot{\varphi}(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$

$\dot{\varphi}(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \qquad \varphi(0) = 0 \rightarrow A = \frac{a}{g}$

$$\Rightarrow \varphi(t) = \frac{a}{g}\cos\omega t - \frac{a}{g} = -\frac{a}{g}(1 - \cos\omega t)$$

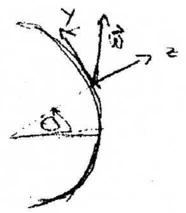
i)



S mitbewegt
S' im IS

$$\dot{\vec{r}}' = \dot{\vec{r}} + \vec{\omega}' \times \vec{r}$$

$$\vec{\omega}' = \omega\begin{pmatrix} 0 \\ \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix}$$



$$\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}'^2 + m\vec{g}\,\vec{r}' =$$

$$= \frac{m}{2}(\dot{\vec{r}} + \vec{\omega}' \times \vec{r})^2 + m\vec{g}\,\vec{r} \qquad \vec{r}' = \vec{r} \text{ aber } \vec{\omega}' \neq \vec{\omega} = 0$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \underbrace{m(\vec{r} \times \dot{\vec{\omega}}')}_{\text{Winkelbeschl.}} + \underbrace{2m(\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega}')}_{\text{Coriolis-Kraft}} + \underbrace{m\,\vec{\omega}' \times (\vec{r} \times \vec{\omega}')}_{\text{Zentrifugalkraft}} + m\vec{g} \qquad \vec{\omega}' = \text{const} \Rightarrow$$

ii) $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{24\cdot 3600\,s} = 7\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{s} \qquad \omega' \ll 1 \Rightarrow \omega'^2 \approx 0$

$$\ddot{\vec{r}} = 2\dot{\vec{r}} \times \vec{\omega}' + \vec{g}$$

iii) $\dot{\vec{r}}' \times \vec{\omega}' = \omega\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \cos\Theta \\ \sin\Theta \end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix} \dot{y}\sin\Theta - \dot{z}\cos\Theta \\ -\dot{x}\sin\Theta \\ \dot{x}\cos\Theta \end{pmatrix}$

$\ddot{x} = 2\omega(\dot{y}\sin\Theta - \dot{z}\cos\Theta)$ $\qquad$ (1)
$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\Theta$ $\qquad$ (2)
$\ddot{z} = 2\omega\dot{x}\cos\Theta - g$ $\qquad$ (3)