Friedrich Wulschner Übungsblatt Montag

Ferienkurs *Theoretische Mechanik* Sommer 2010

Blatt1

1 Kraftfelder

1.1

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F}(r) = (xy, yz, zx)^T$

a)Berechnen sie das Wegintegral $\int \vec{F} \cdot d\vec{s}$ entlang der Graden (0,0,0) nach (1,1,1)
b)Berechnen sie das Wegintegral entlang des aus den drei Geraden von (0,0,0) nach (1,0,0), von (1,0,0) nach (1,1,0) und von (1,1,0) nach (1,1,1) zusammengesetzten Weges
c) Was folgt daraus für $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ Berechnen sie $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ explizit

1.2

Zwei Teilchen haben die Ladungen q_a und q_b Die zugehörige Kraft die Teilchen a auf Teilchen b ist:

$\vec{F}_{ab} = \frac{q_a q_b (\vec{r}_a - \vec{r}_b)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|^3}$

Zeigen sie, daß $rot_a(\vec{F}_{ab}) = 0$

2 Dgl´s

2.1

Lösen sie die folgenden Differentialgleichungen, ggf. mit entsprechenden Anfagnsbedingungen:
$\ddot{x} + \omega^2 x = f e^{-\beta t}$
$m\ddot{z} + \gamma \dot{z} = -m \cdot g$ für die Anfangsbedingungen $z(0) = 0$ und $\dot{z} = 1$
$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega t)$

2.2

Ein paar Eskimos am Nordpol beschließen ihren Müll am Südpol zu entsorgen. Dazu bohren sie einen Schacht mitten durch die Erde($R = 6400km,\ \rho = \frac{5g}{cm^3}$) vom Nordpol zum Südpol. Die Eskimos lassen nun eine Mülltonne der Masse m in den Schacht fallen. Stellen sie die zugehörige Differentialgleichung auf und bestimmen sie die Zeit bis der Müll wieder bei den Eskimos auftaucht

3 Mathematisches Pendel

Ein Fadenpendel besteht aus einem an einem als masselos angenommenen Faden aufgehängten Massenpunkt, der sich im (homogenen) Schwerefeld der Erde bewegt. Die Masse m und die Fadenlänge l sind Konstanten. Die Bewegung erfolge in einer festen Ebene. Als dynamische Variable wählt man den Winkel φ. Durch ihn lassen sich alle relevanten Größen des Problems ausdrücken, z.B. die Höhe über dem tiefsten Punkt der Bahn: $h = l(1 - \cos(\varphi)$ Das mathematische Pendel wird durch folgende Bewegungsgleichung beschrieben:

$ml\ddot{\varphi} = -mgl\sin(\varphi)$

Diese Dgl. ist nichtlinear und besitzt i.a. keine geschlossene Lösung.

a) Ein Spezialfall, für den sich die Lösung exakt bestimmen läßt, ist die Bewegung, bei der das Pendel bei $\varphi(t = 0) = 0$ beginnt und bei $\varphi = \pi$ zum Stillstand kommt. Bestimmen Sie für diesen Fall die Lösung $\varphi(t)$, sowie die Zeit, die das Pendel für diese Bewegung braucht.

b)Die allgemeine Lösung kann man nur näherungsweise, d.h. in Form einer Reihe angeben. Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T(φ_0) als Funktion der Amplitude φ_0 der Schwingung bis zur Ordnung φ_0^2 , d.h. für kleine Auslenkungen.

4 Erdgravitation

Ein Körper der Masse m bewegt sich ausschließlich radial im Gravitationsfeld der Erde (Radius R, Masse M).

a)Wie lauten die Gravitationskraft und das Gravitationspotential, die auf den Körper im Abstand r vom Erdmittelpunkt wirken?

b) Geben Sie die Gesamtenergie E des Körpers im Gravitationsfeld an. Die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers in seinem Startpunkt auf der Erdoberfläche sei v_0. Wie groß ist seine Geschwindigkeit v in Abhängigkeit des Abstandes r vom Erdmittelpunkt?

c) Wie groß muß die Anfangsgeschwindigkeit v_0 mindestens sein, damit der Körper das Gravitationspotential der Erde überwinden kann?

d) Wie lautet der Zusammenhang zwischen Gravitationskonstante G und der lokalen Gravitationsbeschleunigung g an der Erdoberfläche?

e) Die International Space Station kreist in einer Umlaufbahn ca. 350km über der Erdoberfläche (R = 6400km). Wie groß ist dort in etwa die lokale Gravitationsbeschleunigung g_{ISS} im Vergleich zu g auf der Erdoberfläche? Weshalb spricht man trotzdem von Schwerelosigkeit?

5 Satellit

a)Wie lautet das effektive Potential $U_{eff}(\rho)$ für die Bahn eines Erdsatelliten?

b)Der Satellit bewege sich nun auf einer Kreisbahn mit der Frequenz ω. Bestimmen sie den Radius als Funktion der Frequenz. Welcher Radius ergibt sich für eine geostationäre Bahn?

6 Bewegung im Potential

Berechnen sie die Periodendauer eines Körpers mit Energie E im Potential $U(x) = U_0 \cdot tan^2(\alpha x)$.

7 Corioliskraft

Ein theoretischer Physiker läßt vom Olympiaturm in München einen Stein fallen. Aufgrund der Rotation der Erde schlägt der Stein nicht direkt unter dem Abwurfpunkt ein, sondern etwas daneben.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für den abgeworfenen Stein im homogenen Schwerefeld der Erde auf. Reibung soll vernachlässigbar sein.
Hinweis: Es ist hilfreich, ein Koordinatensystem zu verwenden, das mit der Erde mitrotiert. Legen Sie am besten den Koordinatenursprung in den Fuß des Turms und lassen Sie x- und y-Achse in Ost- bzw. Nordrichtung zeigen.

b)Nähern Sie die Bewegungsgleichungen für den Fall, daß die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation ω klein ist. Ist das eine sinnvolle Näherung?

c)Lösen Sie die genäherten Bewegungsgleichungen zu den Anfangsbedingungen $h(0) = h_0$ und $\dot{h}(0) = 0$, wobei h die Höhe über der Erde bezeichnet.

d) Wie groß ist die Ablenkung tatsächlich? Der Turm hat eine Höhe von ca. 200 m und München liegt auf dem 48. Breitengrad. Man benötigt weiterhin die Fallzeit t_0, bei deren Bestimmung die Näherung $\omega t_0 << 1$ gemacht werden darf.