Ferienkurs Experimentalphysik 4

Probeklausur

Markus Perner, Markus Kotulla, Jonas Funke

Aufgabe 1 (Allgemeine Fragen)**. :**

(a) Welche Relation muss ein Operator erfüllen damit die dazugehörige Observable eine Erhaltungsgröße darstellt?

(b) Was versteht man unter der Heisenbergschen Unschärferelation für Ort und Impuls?

(c) Wie werden Bosonen und Fermionen definiert und was besagt das Pauli-Prinzip?

(d) Erklären Sie die Quantenzahlen n, l, m. Welche Rolle spielen sie im Wasserstoffatom ohne Berücksichtigung von Korrekturen?

(e) Was versteht man allgemein unter einem Satz von guten Quantenzahlen? Was sind die guten Quantenzahlen für ein einfaches, wasserstoffähnliches Atom ohne und mit Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung?

(f) Nennen Sie mindestens zwei Gründe, weshalb stationäre Zustände in der Quantenmechanik eine so wichtige Rolle spielen.

(g) Was ist die Bedeutung der Wellenfunktion in der Quantenmechanik?

(h) Wie lauten die Auswahlregeln für elektrische Dipolübergänge?

(i) Wie lauten die Energie-Eigenwerte E_n des eindimensionalen harmonischen Oszillators im stationären Zustand?

(j) Was versteht man unter entarteten Energieniveaus?

(k) Erklaeren Sie das Zustandekommen der Feinstruktur und der Hyperfeinstruktur im Wasserstoffatom. Wo liegt der Unterschied?

Sie sollten für die Beantwortung der Fragen nicht zu viel Zeit aufwenden. Kurze und prägnante Antworten reichen!

Aufgabe 2 (Potentialmulde)**. :**
Gegeben sei eine rechteckförmige Potentialmulde der Breite $b > 0$ und der Tiefe $-V_0$ mit $V_0 > 0$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \text{ (Bereich I)} \\ -V_0 & 0 < x < b \text{ (Bereich II)} \\ 0 & x > b \text{ (Bereich III)} \end{cases}$$

Eine ebene Materiewelle (Energie $E > 0$, Masse m) treffe von links auf diese Potentialmulde. Der Betrag des Wellenvektors in den drei Bereichen soll mit k_I, k_II bzw. k_III bezeichnet werden.

(a) Die Energie E des Teilchens sei nun fest vorgegeben. Berechnen Sie die Muldentiefe V_0 in Abhängigkeit der Energie E, so dass gilt: $k_\mathrm{II} = 4k_\mathrm{I}$.

(b) Die Muldentiefe erfüllt nun die Bedingung aus (a) (d.h. $k_\mathrm{II} = 4k_\mathrm{I}$). Geben Sie für alle drei Bereiche I, II und III die zugehörigen, resultierenden Ortswellenfunktionen $\phi_\mathrm{I}(x)$, $\phi_\mathrm{II}(x)$ und $\phi_\mathrm{III}(x)$ mit allgemeinen Amplitudenkoeffizienten an.
Hinweis: Verwenden Sie für die ebene Teilchenwelle die komplexe Schreibweise und überlegen Sie, welche Wellenkomponenten in den jeweiligen Bereichen auftreten.

(c) Stellen Sie die Gleichungen auf, welche die Ermittlung der Amplitudenkoeffizienten aus (b) erlauben.

(d) Betrachten Sie nun zusätzlich den Spezialfall $\lambda_\mathrm{I} = b/2$, wobei λ_I die Materiewellenlänge im Bereich I bezeichnet. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit T, mit der das Teilchen die Potentialmulde überwindet.

Aufgabe 3 (Zeeman-Effekt)**. :**
Hinweis: Im Folgenden sollen nur elektronische Zustaende betrachtet werden.

(a) Erlaeutern Sie das Zustandekommen des normalen Zeeman-Effektes. In welchen Faellen reduziert sich der anomale auf den normalen Effekt und worin liegen deren Unterschiede?

(b) Welche guten Quantenzahlen sind zusaetzlich zur Hauptquantenzahl n und zur Spinquantenzahl s zur vollstaendigen Beschreibung der Zustaende beim anomalen Zeeman-Effekt notwendig? Welche beim Paschen-Back-Effekt?

(c) Betrachten Sie zwei angeregte Zustaende in Natrium ($Z = 11$) mit dem spektroskopischen Symbolen $3^2D_{3/2}$ und $3^2P_{1/2}$. Fuer die Energieniveaus gilt $E(3^2D_{3/2}) > 3^2P_{1/2}$. Berechnen Sie den Lande-Faktor fuer die beiden gegebenen Zustaende.

(d) Es wird ein schwaches Magnetfeld angelegt. Skizzieren Sie das Termschema fuer die beiden Zustaende aus Aufgabe (c). Tragen Sie in die Skizze die bei elektrischer Dipolstrahlung erlaubten Zeeman-Uebergaenge ein. Geben sie explizite die relevanten Auswahlregeln an.

(e) Wie lautet die Formel fuer die Energieverschiebung der Zeeman-Niveaus mit Magnetfeld gegenueber den entarteten Energieniveaus ohne Magnetfeld? Geben Sie fuer $B = 0.1T$ die Energiedifferenz zwischen dem hoechsten und dem niedrigsten Zeeman-Niveau des $3^2D_{3/2}$ Zustandes an.

Aufgabe 4 (Betazerfall von Tritium)**. :**
Beim β^--Zerfall zerfällt in einem Atomkern ein Neutron in ein Proton, ein Elektron und ein Elektronantineutrino ($n \to p^+ + e^- + \bar{\nu}_e$). Ein radioaktives Tritiumatom ^{3}H wandelt sich durch den Betazerfall in ein $^3He^+$-Ion um. Die Wellenfunktion des Hüllenelektrons, das sich vor dem Zerfall im Grundzustand befindet, bleibe beim Zerfall ungestört. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, dass sich das Hüllenelektron des $^3He^+$-Ions bei einer Messung im 1s-Zustand befindet? In einem wasserstoffähnlichen Atom lautet die Wellenfunktion für ein Elektron im Grundzustand

$$\psi_Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{a_0}}$$

Folgendes Integral könnte hilfreich sein

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r\, r^n \mathrm{e}^{-ar} = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

Aufgabe 5 (Pauli-Prinzip, Gesamtdrehimpuls des Atoms). **:**

Gemäß dem Pauli-Verbot kann jeder Quantenzustand für Elektronen nur mit einem Elektron besetzt werden. Auch in Mehrelektronenatomen werden dabei die Elektronenzustände durch vier Quantenzahlen, hier (n, l, m_l, m_s) beschrieben. Im Grundzustand sind die am stärksten gebundenen Zustände besetzt. Innerhalb einer Elektronenschale werden die Zustände mit niedrigerem l zuerst besetzt, da diese in Mehrelektronenatomen stärker gebunden sind.

(a) Geben Sie an, wie viele Elektronen sich bei Helium, Neon ($Z = 10$), Phosphor ($Z = 15$) und Kupfer ($Z = 29$) jeweils in der K-, L-, M- und N-Schale befinden!

(b) Geben Sie für alle in (a) genannten Elemente an, wie viele Elektronen einen Bahndrehimpuls von $l = 0$ und wie viele einen Bahndrehimpuls von $l = 2$ besitzen!

(c) Geben Sie alle Quantenzahlen für die beiden Elektronen im Grundzustand von Helium an!

(d) Drei stabile Neon-Isotope mit 10, 11 und 12 Neutronen im Kern sind bekannt. Ist es prinzipiell möglich mit einem oder mehreren dieser Isotope ein Bose-Einstein-Kondensat zu erzeugen und wenn ja mit welchen(m)? Begründen Sie ihre Antwort!

Aufgabe 6 (Rotationsanregungen). **:**

Im Kochsalzmolekül $^{23}Na^{35}Cl$ besitzen die beiden Atome einen Gleichgewichtsabstand von $r_0 = 5.6$ Å

(a) Wie groß ist das Trägheitsmoment I des Moleküls

(b) Wie groß ist die Energie für den Rotationszustand mit $j = 1$?

(c) Die lineare Rückstellkraft des harmonischen Potentials zwischen den Kernen ist gegeben durch die Konstante $k = 3.78 \cdot 10^3 \text{ kgs}^{-2}$. Wie groß sind die Energieabstände zwischen den Schwingungszuständen?

Aufgabe 7 (Zusatsaufgabe: $^4D_{1/2}$ im MagnetfelD). **:**

Warum spaltet ein $^4D_{1/2}$ Zustand im schwachen Magnetfeld nicht auf? (Hinweis: Lande-Faktor)

Aufgabe 8 (Zusatzaufgabe: Wasserstoff im Magnetfeld). **:**

(a) Die Spin-Bahn-Aufspaltung des Wasserstoffatoms zwischen $3^2P_{1/2}$ und $3^2P_{3/2}$ beträgt $0.108\,\mathrm{cm}^{-1}$. Schätzen sie ab, bei welchem Magnetfeld der Zeeman-Effekt in den Paschen-Back-Effekt übergeht.

(b) Skizzieren sie die Aufspaltung des 3P sowie des 2S Zustandes bei einem Magnetfeld von 4.5 T und tragen Sie in das Diagramm die möglichen Übergänge zwischen den Niveaus ein. Wie viele unterschiedliche Linien werden beobachtet?

(c) Wie groß ist der energetische Abstand der Linien im Spektrum aus (b).

Hinweis

Es werden nicht alle angegebenen Formeln und Konstanten zur Lösung der Prüfungsaufgaben benötigt.

Physikalische Konstanten

Größe	Symbol, Gleichung	Wert
Vakuumlichtgeschwindigkeit	c	$2{,}9979 \cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}}$
Plancksche Konstante	h	$6{,}6261 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} = 4{,}1357 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eVs}$
Red. Plancksche Konstante	$\hbar = h/2\pi$	$1{,}0546 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}$
Elektr. Elementarladung	e	$1{,}6022 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$
Boltzmann-Konstante	k_B	$1{,}3807 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{JK^{-1}} = 8{,}617 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eVK^{-1}}$
Magnetische Feldkonstante	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{VsA^{-1}m^{-1}}$
Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8{,}8542 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{AsV^{-1}m^{-1}}$
Elektronruhemasse	m_e	$9{,}1094 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} = 0{,}5110\,\mathrm{MeV}/c^2$
(Anti-)Protonruhemasse	$m_{\bar{\mathrm{p}},\mathrm{p}}$	$1{,}6726 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 938{,}2720\,\mathrm{MeV}/c^2$
Neutronruhemasse	m_n	$1{,}6749 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} = 939{,}5653\,\mathrm{MeV}/c^2$
Atomare Masseneinheit	amu	$1{,}6605 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Avogadro-Zahl	N_A	$= 6.023 \cdot 10^{23}$
Bohr'scher Radius	$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e}$	$5{,}29 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}$
Bohr'sches Magneton	μ_B	$9{,}2741 \cdot 10^{-24}\,\mathrm{JT^{-1}} = 5{,}7884 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eVT^{-1}}$
Kernmagneton	μ_K	$= 5{,}0508 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{J/T} = 3{,}152 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{MeV/T}$
Magnetisches Moment des Protons:	μ_P	$2{,}79\mu_K$
Feinstrukturkonstante	$1/\alpha$	$137{,}036$
Rydbergsche Konstante	R_∞	$13{,}6057\,\mathrm{eV}$

Material-, Teilchen- und Kerneigenschaften

Dichte von Gold: $\rho_{Au} = 19{,}32\,\mathrm{g/cm^3}$
Molmasse von Gold: $M_{Au} = 197{,}0\,\mathrm{g/mol}$
Halbwertszeit von Thorium 229: $t_{1/2} = 7880\,\mathrm{a}$
Molmasse von Thorium 229: $M_{Th} = 229{,}0\,\mathrm{g/mol}$
Myon: Ladung $q = -e$, $m_\mu = 207\,m_\mathrm{e}$
Anti-Proton: $q = -e$, Radius $R_{\bar{\mathrm{p}}} = 10^{-15}$ m
Zirkonium-Kern: $Z = 40$, $R_\mathrm{Zn} = 5{,}3 \cdot 10^{-15}$ m, $m_\mathrm{Zn} = 90 \cdot m_\mathrm{p}$

Physikalische Formeln

Rutherfordsche Streuformel

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z_1 Z_2 e^2}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$$

Definition des Landé–Faktors

$$\langle\mu_j\rangle = \mu_\mathrm{B}\, g_j \sqrt{j(j+1)}$$

Landé-Faktor für LS-Kopplung

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}$$

Winkel zwischen Hüllen- und Kerndrehimpuls (Hyperfeinstruktur)

$$\cos\left(\sphericalangle(\vec{I},\vec{J})\right) = \frac{F(F+1)-I(I+1)-J(J+1)}{2\sqrt{J(J+1)}\sqrt{I(I+1)}}$$

Fermi-Dirac-Verteilung

$$f_{FD}(E,T) = \frac{1}{\exp\frac{E-E_F}{k_B T}+1}$$

Schrödingergleichung

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi\left(\vec{r},t\right) = -\left[\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V\left(\vec{r},t\right)\right]\psi\left(\vec{r},t\right)$$

Energiezustände im unendlich hohen Potentialtopf der Breite l

$$E_n = \frac{\hbar^2\cdot\pi^2}{2\cdot m\cdot l^2}\cdot n^2 = E_0\cdot n^2$$

Doppler-Verbreiterung

$$\delta\omega_D = 7.16\times 10^{-7}\cdot\omega_0\cdot\sqrt{T/M\,[mol/(gK)]}$$

Matrixelement für Dipolmoment $e\vec{r}$

$$M_{ik} = \int \Psi_i^*\left(e\vec{r}\right)\Psi_k dxdydz$$

Einstein-Koeffizient für spontane Emission

$$A_{ik} = \frac{2}{3}\frac{\omega_{ik}^3}{\epsilon_o\, h\, c^3}|M_{ik}|^2$$

Einstein-Koeffizient für Absorption

$$B_{ik} = \frac{2}{3}\frac{e^2\,\pi^2}{\epsilon_o\, h^2}|M_{ik}|^2$$

Mathematische Formeln

Integrale

$$\int_0^R r^2 e^{-\alpha r}dr = -e^{-\alpha R}\left(\frac{R^2}{\alpha}+\frac{2R}{\alpha^2}+\frac{2}{\alpha^3}\right)+\frac{2}{\alpha^3}$$

$$\int_0^\infty r^2 e^{-\alpha^2 r^2}dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^3}$$